

§ 1

Кинематика материальной точки

Опр кинематика - раздел механики, изучающий движение тел без рассмотрения причин движения

Опр материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь

Движение точки по прямой линии


 Чтобы измерить расстояние нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон

Чтобы измерить промежуток времени нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон

Чтобы измерить Δ физ. величину нужно ввести ед. измерения

Опр метр - расстояние, которое проходит свет в вакууме $\sim$ за $\frac{1}{3 \cdot 10^8}$ с

Опр секунда - продолжительность $\sim 10^{10}$ колебаний электрона в атоме цезия

$x [м], t [с]$

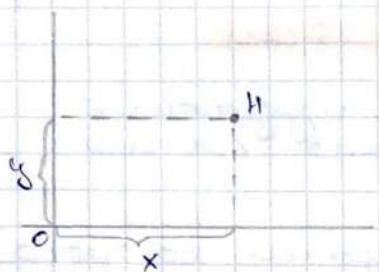
$x = x(t)$ - закон движения точки по прямой линии

Опр ось координат - прямая линия, на которой выбрано начало отсчёта, положительное направление и ед. измерения длины

Опр координаты точки - расстояние от начала отсчёта, взятое со знаком '+', если т. смещена в положительном направлении и с '-' иначе

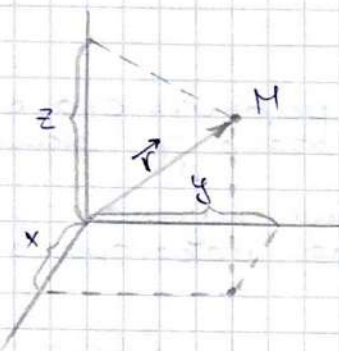
$x = \frac{gt^2}{2}$ свободное падение $g \approx 9,8 \frac{м}{с^2}$ - ускорение свободного падения

Движение точки на плоскости



$x[M]$ - декартовы
 $y[M]$ координаты точки
 $x(t)$ - закон движения
 $y(t)$ точки на плоскости

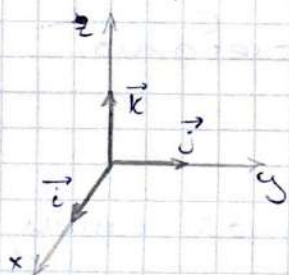
Движение точки в 3-м пространстве



$x[M], y[M], z[M]$
 $x(t), y(t), z(t)$
 $\vec{r}(t)$ - закон движения
 точки в пр-ве

Опр. радиус вектор точки - вектор, проведенный от начала отсчета к данной мат. точке

Опр. орты декартовых координат - единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат



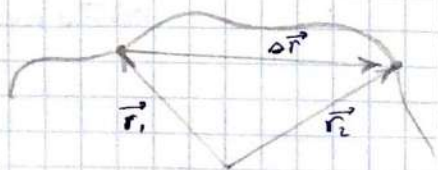
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

Опр. проекция вектора на ось - разность координат конца и начала вектора, взятых по отношению к данной оси

Опр. перемещение - разность радиус векторов точки, взятых в два разных момента времени

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad r_1 = r_1(t), \quad r_2 = r_2(t)$$



Опр. Длительность перемещения $\Delta t = t_2 - t_1$

Опр. скорость мат. точки - отношение перемещения точки к длительности перемещения в пределе, когда $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \quad v [\text{м/с}]$$

Декартовы компоненты скорости v_x, v_y, v_z

$$\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z$$

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \\ &= \vec{i} \dot{x} + \vec{j} \dot{y} + \vec{k} \dot{z}, \quad v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \end{aligned}$$

Опр. модуль скорости $|\vec{v}| \equiv v$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Опр. ускорение мат. точки - производная скорости точки по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Декартовы компоненты ускорения

$$\vec{a} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z) = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt}$$

$$a_x = \dot{v}_x \equiv \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y \equiv \ddot{y} \quad a_z = \dot{v}_z \equiv \ddot{z}$$

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a [\text{м/с}^2]$$

1) Равномерное прямолинейное движение

Опр. - движение с постоянной скоростью $v_x = \text{const}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_x dt = dx \quad \int_0^t v_x dt = \int_{x_0}^x dx \quad v_x \cdot t = x - x_0$$

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t$$

2) прямолинейное равнопеременное движение

$$a_x = \text{const}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt \Rightarrow v_x - v_{x0} = a_x \cdot t$$

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x \cdot t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (v_{x0} + a_x \cdot t) dt = v_{x0} t + a_x \cdot \frac{t^2}{2}$$

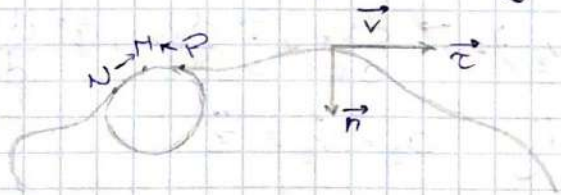
$$x(t) = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad x = \frac{at^2}{2} \quad (x_0 = 0, v_{x0} = 0)$$

Измерение ускорения:

$$a = \frac{2x}{t^2}$$

Криволинейное дв-е точки

Опр. тангенциальное и нормальное ускорение - составляющие ускорения точки из которых параллельна $\vec{v}$, а другая $\perp \vec{v}$ и направлена к центру кривизны траектории этой точки



Опр. круг кривизны кривой в точке - круг, проходящий через данную точку кривой M и две другие точки кривой N, P в пределе, когда $N \rightarrow M, P \rightarrow M$

Найдем $\vec{\tau}$ - и $\vec{n}$ - ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad |\vec{\tau}| = 1$$

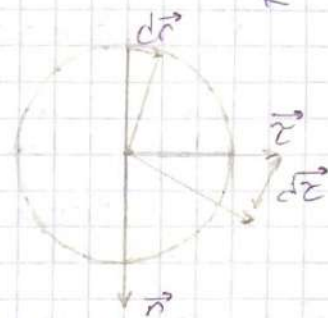
$$\vec{a} = \vec{\tau} \cdot a_\tau + \vec{n} \cdot a_n \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{\tau} \cdot v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{e} \cdot v) = \vec{e} \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \in$$

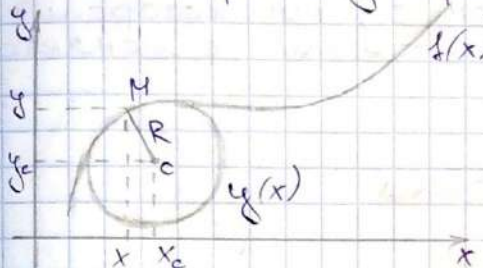
$$d\vec{e} = \vec{n} |d\vec{e}| \quad \frac{|d\vec{e}|}{|\vec{e}|} = \frac{dn}{R} \Rightarrow |d\vec{e}| = \frac{dn}{R} \Rightarrow d\vec{e} = \vec{n} \frac{dn}{R}$$

$$\in \vec{e} \frac{dv}{dt} + v \cdot \vec{n} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dn}{dt} = \vec{e} \frac{dv}{dt} + \vec{n} \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}}$$



Найдем радиус кривизны кривой



$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

$$y(x) = d(x) \quad y'(x) = d'(x)$$

$$y''(x) = d''(x)$$

$$2(x - x_c) + 2(y - y_c)y' = 0 \quad | : 2$$

$$(x - x_c) + (y - y_c)y' = 0 \quad \text{диф.} \rightarrow 1 + y'^2 + (y - y_c)y'' = 0$$

$$y - y_c = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

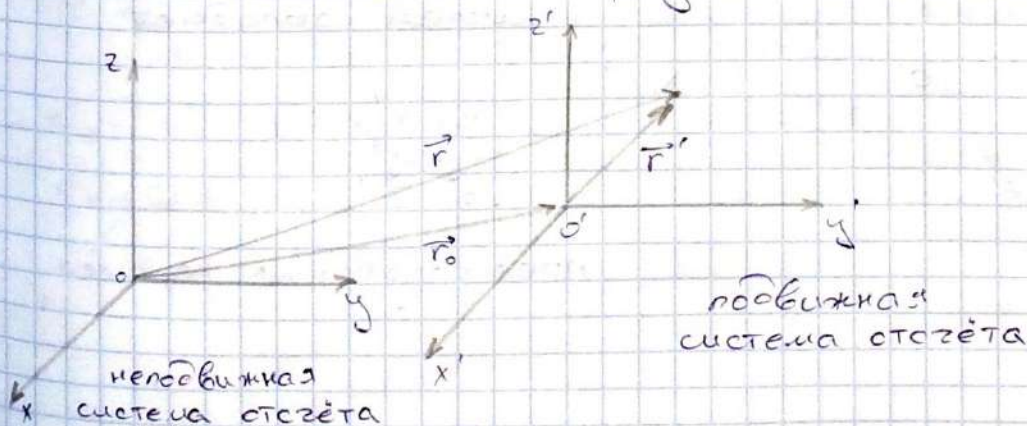
$$x - x_c = \frac{1 + y'^2}{y''} y'$$

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 (y'^2 + 1) = R^2$$

$$R = \frac{1 + y'^2}{|y''|}$$

§2 Относительность механического движения

Опр — различие движения одного и того же тела относительно разных тел отсчёта



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{v}_{0\text{отн}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{с.о.}}$$

абсолютная скорость = относительной скорости + скорости системы отсчёта

$$\vec{a}_{0\text{отн}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{с.о.}}$$

Эти формулы справедливы при поступательном движении подвижной системы отсчёта

Спр. поступательным наз. движение, при котором ориентация осей подвижной системы не меняется

§3

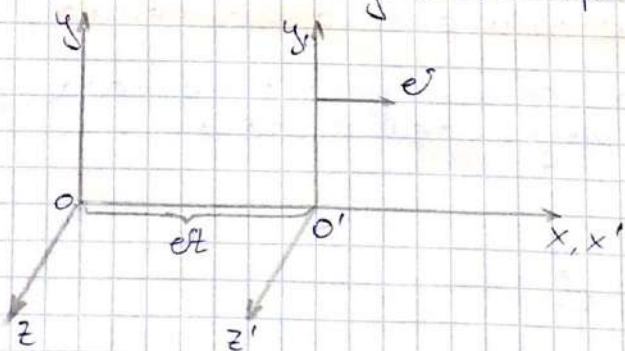
Принцип относительности преобразования Галилея преобразования Лоренца

принцип относительности Галилея:

никакими мех. опытами, проводимыми внутри данной с.о. нельзя установить: находится эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется

математическая формулировка:

уравн., выражающие физ. законы, должны быть инвариантны отн. преобразования, описывающего переход от неподвижной с.о. к системе движущейся прямолинейно и равномерно



будем отсчитывать время от момента когда начала обеих систем совпадают

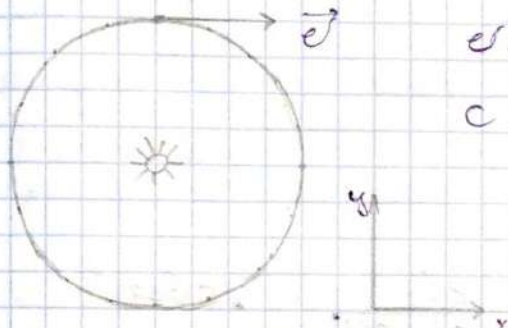
$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

преобразования Галилея

$$\begin{cases} e_x = e'_x + e \\ e_y = e'_y, \quad e_z = e'_z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{правила сложения} \\ \text{скоростей Галилея} \end{array}$$

в XIX в. выяснилось, что ур-я электромагнитного поля не инвариантны отн. преобразования Галилея
было решено проверить правило сложения e Галилея для электромагнитных волн

Майкельсон решил использовать в качестве подвижной со. земной шар в его движении вокруг Солнца



$$v = 3 \cdot 10^4 \text{ м/с}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

гипотеза неподвижного эфира

предположение о том, что e света отн. = c , а отн. Земли она определяется правилом Галилея

$$e_x^2 + e_y^2 = c^2$$

$$e_x = e'_x + e$$

$$e_y = e'_y$$

Опр. продольная и поперечная скорости света

(1) - скорость света отн. Земли в направлении ее движения по орбите

(2) - скорость света отн. Земли в направлении $\perp$ направлению движения по орбите

$$e_{||} = |e'_x|, \quad e'_y = 0$$

$$e_{||} = c \pm e$$

$$e_{||} \neq e$$

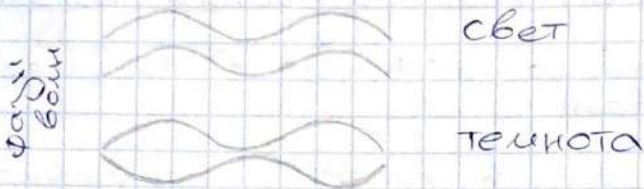
$$e_{\perp} = |e'_y|, \quad e'_x = 0$$

$$e_{\perp} = \sqrt{c^2 - e^2}$$

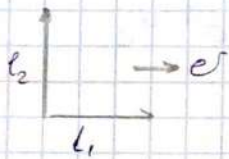
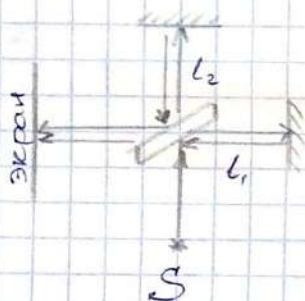
Спр интерференция света

— взаимная компенсация Действия световых волн
в некоторых точках пространства

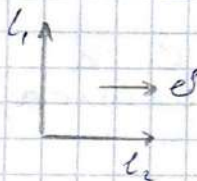
свет + свет = темнота



интерферометр Майкельсона



$$\frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad \text{"свет"}$$



$$\frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{T}{2}, \quad T = \frac{\lambda}{c}$$

"темнота"

$$l_1 \approx l_2 = \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{c}{v} \right)^2, \quad \lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} \\ \approx 10 \text{ м}$$

опыт показал, что повороты прибора не меняли,
наблюдаемую интерф. картину.

Вывод: гипотеза неподвижного эфира ошибочна

Движение Земного шара не играет роли

принцип постоянства скорости света:

скорость света не зависит от того по отношению к
какой с.о. (покою или движ.) она определяется

относительность времени

$$c\delta_{\text{одн}} = c\delta_{\text{отн}} = c$$

$$(1) \quad x = ct$$

$$(2) \quad x' = ct' \quad t \neq t' \quad \nabla \text{ время течёт по-разному}$$

$$x, y, z, t \Leftrightarrow x', y', z', t'$$

$$(3) \quad x = x' + ct'$$

$$(4) \quad t = t' + \frac{cx'}{c^2}$$

формулы (1)-(4) совместны

$$(5) \quad x' = x - ct$$

$$(6) \quad t' = t - \frac{cx}{c^2}$$

ф-лы (1), (2), (5), (6) совместны

(3)-(6) не совместны

$$x = \frac{x' + ct'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad y = y', \quad z = z'$$

преобразования Лоренца

оказалось, что ур-я эл. магн. поля инвар. отн.
преобразования Лоренца

принцип относительности Эйнштейна:

ур-я, выражающие физ. законы должны быть
инвар. отн. преобразований Лоренца

пример

сложение скоростей в теории относительности

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$v_x = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}$$

§4

Кинематика твёрдого тела

Опр. твёрдое тело - система мат. т., расстояние между парой которых всегда остаётся неизменным

- поступательное дв-е тела

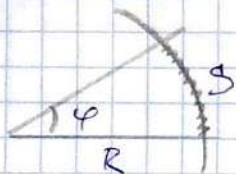
- движение, при котором ориентация тела в пр-ве не меняется

в этом случае в всех точках тела одинаковы

- вращение вокруг неподвижной оси

- движение, при котором все т. тела движутся по окружности, а центры всех окр. лежат на одной прямой (ось вращения)

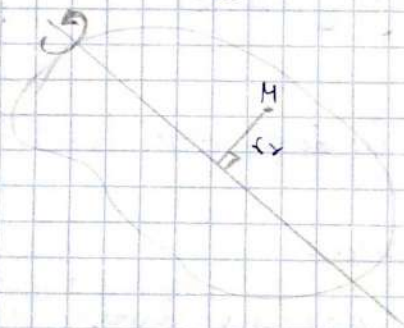
Достаточно задать угол поворота φ (в радианах)



$$\varphi = \frac{s}{R} \quad \begin{array}{l} \text{— длина дуги окружности} \\ \text{— радиус окружности} \end{array}$$

$$s = R\varphi$$

$\varphi = \varphi(t)$ - закон дв-я



$$v = \frac{dr}{dt} \approx \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \dot{\varphi}$$

Опр. угловая скорость вращения тела

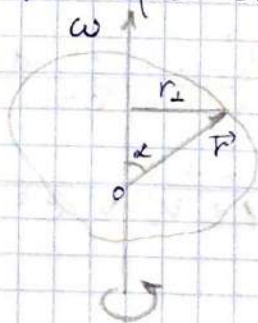
- производная угла поворота тела по времени

$$v = \omega r_{\perp}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

Опр. вектор угловой скорости тела - вектор, направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта и = по модулю производной угла поворота тела по времени

$$\vec{\omega} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

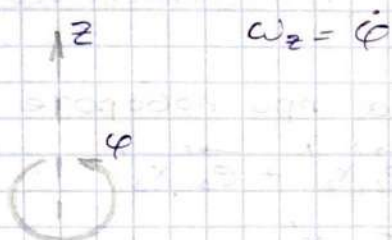


$$\vec{v} \oplus$$

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega r_{\perp}$$

Спр Векторное произведение векторов -

Проекция вектора угловой скорости на ось вращения тела равна производной угла поворота тела по времени при условии, что направление отсчёта угла связано с направлением оси правилом правого винта



Движение тела с одной неподвижной точкой

⊕ (Эйлера)

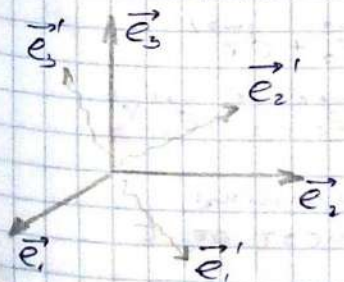
Движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно представить как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку закрепления

$$\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$

$\vec{\omega}$ направлен вдоль мгновенной оси вращения тела и равен по модулю производной угла поворота тела по времени

Спр мгновенная ось вращения - прямая линия, на которой лежат неподвижные в данный момент точки тела

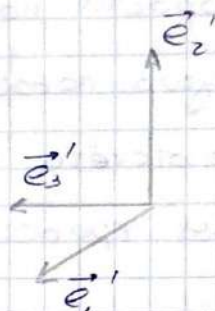
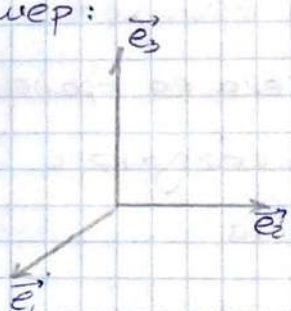
Спр матрица поворота тела - матрица, составленная из скалярных произведений ортов двух координатных систем (лабораторных и системы тела)



$$D_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}'_j) \equiv \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j = e_i e'_j \cos \alpha$$
$$i, j = 1, 2, 3$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \vec{e}_1' & \vec{e}_1 \vec{e}_2' & \vec{e}_1 \vec{e}_3' \\ \vec{e}_2 \vec{e}_1' & \vec{e}_2 \vec{e}_2' & \vec{e}_2 \vec{e}_3' \\ \vec{e}_3 \vec{e}_1' & \vec{e}_3 \vec{e}_2' & \vec{e}_3 \vec{e}_3' \end{bmatrix}$$

Пример:



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

поворот на 90°
(относительно оси x)

Преобразование компонент вектора при повороте с.о.

$$\vec{r} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3 = \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3' \quad | \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_i')$$

$$x_i = S_{i1} x_1' + S_{i2} x_2' + S_{i3} x_3' = \sum_{j=1}^3 S_{ij} x_j'$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} x_j'$$

Свойкой поворот:

$$x_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} x_j'$$

$$x_j' = \sum_{k=1}^3 B_{jk} x_k''$$

$$\Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \sum_{k=1}^3 B_{jk} x_k'' =$$

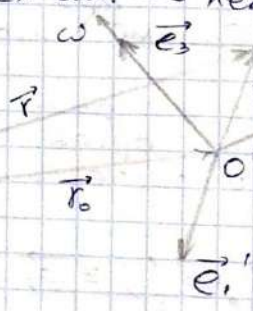
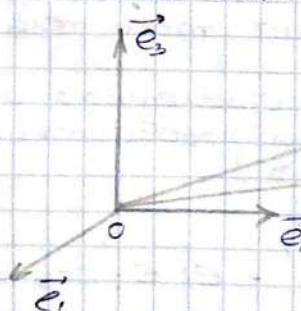
$$= \sum_{k=1}^3 x_k'' \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{jk} = \sum_{k=1}^3 x_k'' C_{ik} \Rightarrow x_i = \sum_{k=1}^3 C_{ik} x_k''$$

$$\hat{C} = \hat{A} \hat{B} \neq \hat{B} \hat{A}$$

§5

Кинематика вращающихся систем отсчёта

установим связь между кинематическими характеристиками точки отн. 2х с.о. — неподвижной и вращающейся



$$\vec{\omega} = \text{const}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$$

$$\vec{r}' = \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3'$$

все величины
зависят от t

$$d\vec{r}' = \underbrace{\vec{e}_1' dx_1' + \vec{e}_2' dx_2' + \vec{e}_3' dx_3'}_{d'\vec{r}'} + \underbrace{x_1' d\vec{e}_1' + x_2' d\vec{e}_2' + x_3' d\vec{e}_3'}_{(*)}$$

отн. вращающейся системы

$$\vec{\omega} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}] dt \quad - \text{описывает приращ. вектора, жёстко связанного с вращающейся с.о.}$$

$$d\vec{e}_i' = [\vec{\omega}, \vec{e}_i'] dt, \quad i = 1, 2, 3$$

$$(\cdot)' = [\omega, x_1' \vec{e}_1' + x_2' \vec{e}_2' + x_3' \vec{e}_3'] dt = [\omega, \vec{r}'] dt$$

$$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + [\omega, \vec{r}'] dt$$

$$\text{связь скоростей: } d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d'\vec{r}' + [\omega, \vec{r}'] dt \quad | : dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\omega, \vec{r}']$$

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + [\omega, d'\vec{r}']$$

$$\vec{v}' = \vec{e}_1' \dot{x}_1' + \vec{e}_2' \dot{x}_2' + \vec{e}_3' \dot{x}_3'$$

$$d\vec{v}' = d'\vec{v}' + [\omega, \vec{v}'] dt$$

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] dt + [\vec{\omega}, d'\vec{r}'] + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k$$

$$\vec{a}_n = \vec{a}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] \quad - \text{переносное ускорение}$$

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] \quad - \text{корриолисово у-е}$$

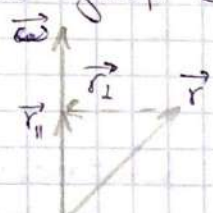
$$[\vec{a}, [\vec{e}, \vec{c}]] = \vec{e}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{e})$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp} \Rightarrow [\vec{\omega}, \vec{r}] = [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}]$$

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}) - \vec{r}_{\perp} \omega^2$$

$$\vec{a}_{\text{цс}} = -\omega^2 \vec{r}_{\perp} \quad - \text{центростремительное ускорение}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{цс}} = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_{\perp}$$



§6 Законы Ньютона

① Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние

② Произведение массы мат. т. и ускорения равно действующей на нее силе

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

③ Действие двух тел друг на друга равно и противоположно

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Опр. масса - мера отклика тела на действие силы

Опр. сила - мера действия на данное тело других тел

1 кг - масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия $\varnothing 39 \text{ мм}$ $h = 39 \text{ мм}$

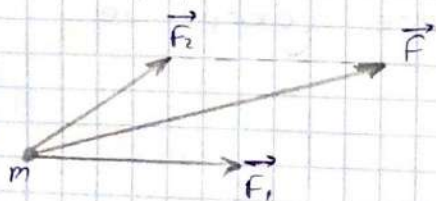
1 Н - сила, вызывающая ускорение 1 м/с^2 у тела $m = 1 \text{ кг}$
 чтобы измерить m силой в 1 Н и измерили $\vec{a} = 25 \text{ м/с}^2$
 чтобы измерить $\vec{F}$, подействовав ею на тело $m = 1 \text{ кг}$ и измерили $\vec{a}$
 опытная проверка:

закон Ньютона неприменим: $\vec{E} \sim \vec{c} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

Движение очень маленьких тел в очень маленьких областях (qб-электронов в атомах)

Сложение сил:

Если на мат. точку одновременно действуют 2 силы, то она начинает двигаться так, как если бы действовала 1 сила, равная векторной сумме первых двух сил



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

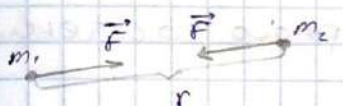
Опр. Импульс материальной точки - произведение массы точки и её скорости $\vec{p} = m\vec{v}$ $[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}]$

II в импульсной форме:

Скорость изменения импульса мат. точки равна действующей на него силе $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$

Силы в механике

В. Две мат. точки притягиваются друг к другу с силой пропорциональной их массам и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними



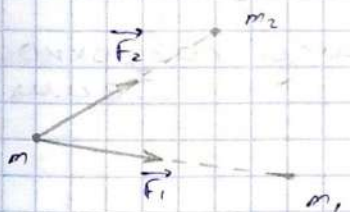
$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

гравитационная постоянная $G = 6,6 \cdot 10^{-11} [\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}]$

опыт Кавендиша

Принцип суперпозиции:

Каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так как если бы других частиц не было



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$



$$\vec{F} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Пример: притяжение мат. точки к однородному шару



расчёт показывает, что $\vec{F}$ притяжения такова, как если бы вся масса шара находилась в его центре

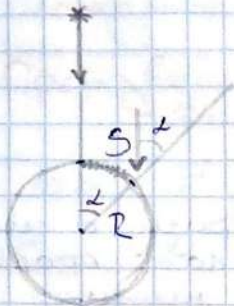
$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Увеличение Земли:

$$mg = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow M = g \cdot \frac{R^2}{G} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

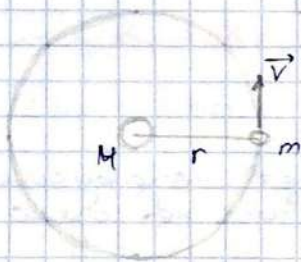
Измерение радиуса Земли:

$$\alpha = \frac{S}{R} \Rightarrow R = \frac{S}{\alpha} \approx 6400 \text{ км}$$



Факты, подтверждающие закон всемирного тяготения

1) период обращения Луны



$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi r \sqrt{r}}{\sqrt{GM}}$$

$$r = 384\,000 \text{ км} \Rightarrow T \approx 27 \text{ суток}$$

2) одинаковое g для всех тел вблизи поверхности Земли

$$mg = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow g = G \frac{M}{R^2}$$

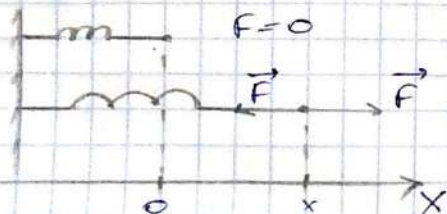
Сила упругости

$F_{\text{уп}}$ — сила, приносящая деформации упругих тел

Упругое тело — тело, восстанавливающее свою форму после прекращения действия силы

Закон Гука:

сила упругости пропорциональна величине деформации



$$\vec{F} \sim x$$

$$F = kx$$

$$F_x = -kx$$

$k \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$ — коэффициент упругости

Закон Кула не фундаментальный физ. закон, а приближенное соотношение верное при не слишком большой деформации

Сила трения

Опр - силы, препятствующие относительному перемещению соприкасающихся тел

Трение покоя

Опр - трение в отсутствие отн. перем. соприкас. тел

$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{тр} = -\vec{F}$$



опыт показывает, что сила трения покоя ограничена сверху

$$F_{тр} \leq F_{max}$$

Сила нормального давления

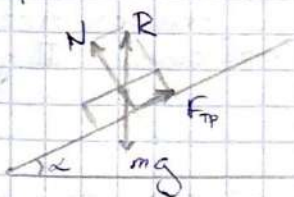
Опр - составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения

$N [Н]$

$$F_{max} \sim N$$

$$F_{max} = \mu N$$

Пример:



$$\mu = \tan \alpha$$

Трение скольжения

Опыт показывает, что сила трения скольжения $\approx F_{max}$

$$F_{тр} = \mu N$$

не фундаментальный закон, а приближенное равенство

Вязкое трение

Опр - трение, препятствующее движению тела в сплошной среде
особенности: 1) нет трения покоя

2) сила вязкого трения $\sim$ скорости движения

$$F_{тр} \sim v$$

Электро-магнитные силы

Опр. эл. заряд — мера эл. взаимодействия тел

Опр. эл. поле — поле, создаваемое эл. зарядами и проявляющее себя действием на эл. заряд

Опр. Напряжённость эл. поля — мера действия поля на заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \vec{F} = q\vec{E} \text{ — сила Кулона}$$

сила Лоренца: $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}]$, $\vec{B}$ — вектор магн. индукции

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{V}, \vec{B}]$$

Релятивистское ур-е движения

смысл: ур-е, обобщающее II закон Ньютона на случай движения тел с большими скоростями

$$\vec{\dot{p}} = \vec{F}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \begin{array}{l} m \text{ — масса мат. точки} \\ v \text{ — её скорость} \\ c \text{ — скорость света} \end{array}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{V}, \vec{B}]$$

идея вывода:

1. вводим сопровождающую систему отсчёта:
 $V(t) = 0 \Rightarrow$ частица подлин. II з.Н

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_1$$

2. переходим к неродвижной с.о., оси которой || осям сопровождающей системы $\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2$

$$\vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_2$$

3. поворот системы координат. матрица поворота

§8

ИСО. силы инерции

Опр ИСО - если относительно неё $\forall$ тело $\in$ удалённое от других тел не испытывает ускорение

с.о., связанная с Землей, $\sim$ ИСО

ИСО - с.о., движущаяся с большим ускорением отн. поверхности Земли

Введем ур-е движения мат. точки относительно ИСО

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (\text{ИСО})$$

$$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F} \quad , \quad \vec{a}' - \text{ускорение мат. точки отн. ИСО}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m(\vec{a} - \vec{a}')$$

Опр Сила инерции - добавочная сила, действующая на мат. точку вне ИСО и определяемая формулой:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$$

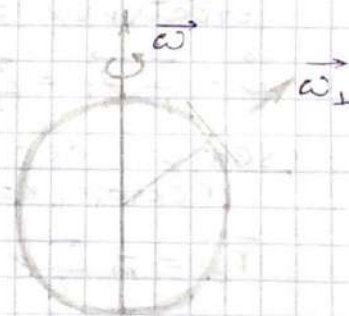
$$\text{из §5} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k, \quad \vec{a}_n = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_n + \vec{F}_k, \quad \vec{F}_n = -m\vec{a}_n$$

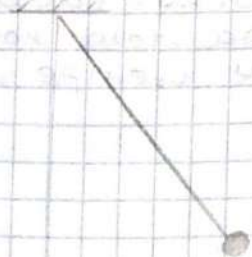
$$\vec{F}_{\text{ц.с.}} = m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

В северном полушарии на тела, движущиеся по поверхности Земли, действует $\vec{F}_k$, направленное вправо



$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

Магнитик Фуко



Плоскость колебания магнитика медленно поворачивается вокруг вертикальной оси

- этот опыт доказывает вращение Земли



Св-ва сил инерции:

- 1) силы $\neq 0$ только для наблюдателя, связанного НСО
- 2) нельзя указать тело со стороны которого приложены силы инерции
- 3) не подчиняются III з. Н.

Невесомость

— исчезновение веса тела, вызванное ускорением со

Перезрузка

— возрастание веса тела, вызванное ускорением со

Центрифуга

— устройство, использующее $F_{ц.б.}$

§9

Импульс системы частиц.
Движение центра масс

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

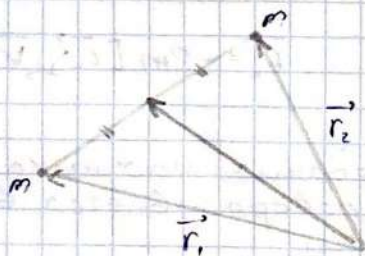
Опр импульсом системы частиц наз. Σ импульсы отдельных частиц системы

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Опр центр масс системы частиц — точка, радиус вектор которой определяется формулой:

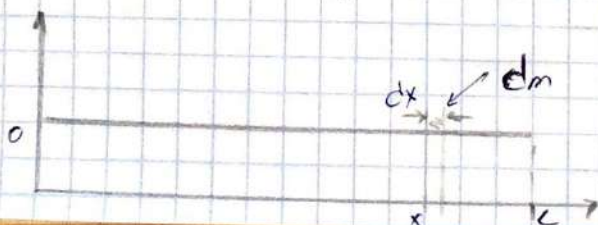
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad m = \sum_i m_i$$

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$



$\Rightarrow$ Для обособших сил тел центр масс тела находится в его грав. центре

Пример: центр масс стержня



$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i x_i m_i$$

$$dm = \frac{m}{l} dx$$

$$x dm = \frac{m}{L} x dx$$

$$x_c = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{L} \int_0^L x dx = L/2$$

Скорость и ускорение центра масс

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_c = \dot{\vec{v}}_c = \ddot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{\text{сист. частиц}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c$$

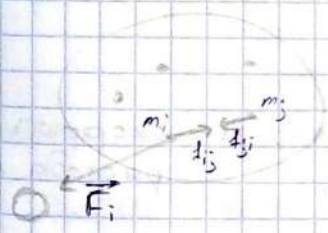
импульс $\vec{P}$ системы таков, как если бы вся масса системы находилась в ее центре масс

Закон движения центра масс:

внутренние силы - силы взаимодействия между телами в данной системе

$\vec{F}_{ij}$ действует на (.) i со стороны (.) j

внешние силы - силы, действующие на тела системы со стороны тел не входящих в данную систему



$$m_i \vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \quad | \quad \sum_i$$

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$$

Для $\forall$ пары частиц системы сумма внутренних сил = 0

$\Rightarrow$ для системы в целом $\sum$ внутренних сил равен 0

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i \equiv \vec{F}_{\text{внешн.}}$$

"масс"

$$\Rightarrow m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внешн.}}$$

Центр масс в мех. системе движется так, как если бы в этой точке находилась вся масса системы и к ней были бы приложены все внешние силы

закон движения центра масс $\uparrow$

§10

Закон сохранения импульса

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш.}}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{\text{вн}}$$

скорость изменения импульса мех. системы равна сумме внешних сил

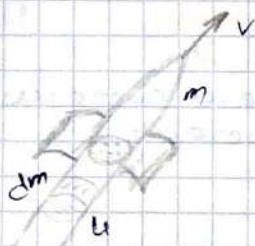
$$\vec{F}_{\text{вн}} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

ЗСИ относительно оси

Если $\exists$ такая ось, в проекции на которую $\vec{F}_{\text{вн}} = 0$, то в направлении этой оси импульс системы сохраняется

$$\vec{F}_{\text{вн}}^{(x)} = 0 \Rightarrow p_x = \sum_i m_i v_{ix} = \text{const}$$

Реактивное движение



$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u} dm$$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{c}, \quad \vec{c} - \text{скорость струи}$$

$$m\vec{v} = m\vec{v} + m d\vec{v} - \vec{v} dm - dm d\vec{v} + \vec{v} dm + \vec{c} dm$$

$$m d\vec{v} = -\vec{c} dm \quad | : dt$$

$$m \vec{a} = -\vec{c} \frac{dm}{dt} = -\vec{c} \dot{m} = -\vec{c} \mu, \quad \mu - \text{скорость расхода } m$$

$$\vec{F}_p = -\mu \vec{c}$$

Найдем стартовую массу ракеты

$$m \frac{dv}{dt} = \mu c \quad - \text{уравнение движения}$$

$$m = m(t) = m_0 - \mu t$$

$$\frac{dv}{c} = \frac{\mu dt}{m_0 - \mu t}$$

$$\frac{1}{c} \int_0^v dv = \mu \int_0^t \frac{dt}{m_0 - \mu t}$$

$$\frac{v}{c} = -\ln \frac{m_0}{m} \Rightarrow \frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{c}}$$

Пример: ракета "Энергия"

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$\mu = 10^4 \text{ кг/с} \Rightarrow F_p = 3 \cdot 10^7 \text{ Н}$$

$$m = 10^5 \text{ кг}$$

$$v = 10^3 \cdot 8 \text{ м/с}$$

$$m_0 = 2000 \text{ тонн}$$

§ 11

Работа и потенциальная энергия

Опр элементарная работа - скалярное произведение силы на $\vec{r}(t)$ перемещение точки приложения силы

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad [\text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}]$$

1 Дж - работа, которую совершает сила $\equiv 1 \text{ Н}$ при перемещении точки прилож. силы на 1 м в направлении прилож. силы

$$A = \int dA \quad dA = F \cdot dr \cdot \cos \alpha$$

↑ полная работа = Σ элем. работ

Опр Π - сила, работа которой равна 0 при перемещении точки прилож. силы по замкнутому контуру ($\vec{F}_T, \vec{F}_{упр}, \vec{F}_{упр}$)

пример не потенциальной силы - $F_{тр}$, мышечная сила

Опр элементарная потенциальная энергия - эл. работа потенциальной силы, взятая со знаком минус

$$d\Pi = -dA_n$$

потенц. энергия = Σ элем. потенц. энергий $\Pi = \int d\Pi$

Связь силы и потенциальной энергии

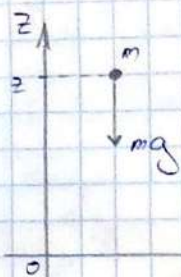
$$d\Pi = -dA_n = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \Rightarrow F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z = -\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)$$

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{градиент } \phi \text{ и } \Pi \end{array}$$

Пример ① потенциальная энергия мат. точки в поле силы тяжести

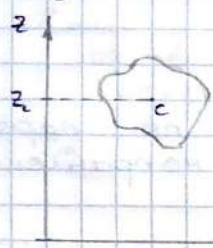


$$dP = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = -mg dz$$

$$dP = mg dz$$

$$P = \int dP = mg \int_0^z dz = mgz$$

② P тела в поле силы тяжести



$$P = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i = g m z_c$$

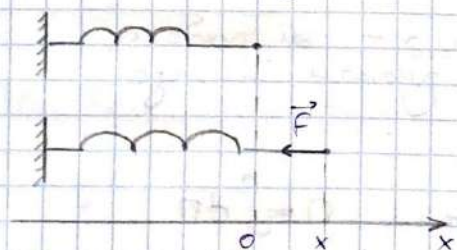
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i \Rightarrow z_c \cdot m = \sum_i m_i z_i$$

Опр. P системы частиц кон. $\sum$ P отдельных частиц системы

$$P = \sum_i P_i$$

P тела в поле силы тяжести такова, как если бы вся масса тела находилась в его центре масс

③ P пружины

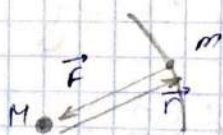


$$dP = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = -F_x dx = kx dx$$

$$P = \int dP = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}$$

④ P мат. точки в поле центральной силы

Опр. — сила, направленная всегда в сторону одной и той же точки, называемой шлювым центром



$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\vec{F} = F \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$dP = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = F \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = \frac{F}{r} \vec{r} d\vec{r}$$

$$\vec{r} d\vec{r} = x dx + y dy + z dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr$$

$$d\pi = F dr$$

$$\pi = \int d\pi = G M m \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = G M m \int_{r_0}^r d\left(-\frac{1}{r}\right) = G M m \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}\right) = \pi$$

$$\pi = -\frac{G M m}{r} \quad r_0 = \infty$$

§12

Кинетическая энергия

Опр К мат. т. нап. величина, опред. формулой

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж} \right]$$

Закон изменения К:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad | \cdot d\vec{r}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r} = dA$$

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m \vec{v} d\vec{v} = m v dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$$

Приращение К мат. т. = работе, действующей на нее силы

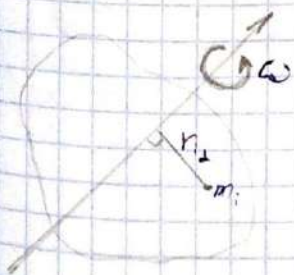
Опр К системы частиц - сумма К отдельных частиц системы

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

1) Вычислим эту величину для твёрдого тела при поступательном движении

$$v_i = V \Rightarrow K = \frac{mV^2}{2}$$

2) К тела, вращающегося вокруг неподвижной оси



$$v_i = \omega r_{i\perp}$$

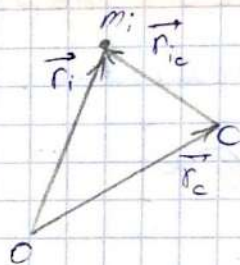
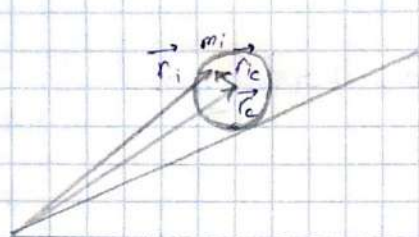
$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = I \frac{\omega^2}{2}$$

Опр моментом инерции тела относительно данной оси наз. величина, опред. формулой

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

③ К тела, совершающего плоское движение

Опр плоское движение — дв-е, при котором все (.) тела движется || некоторой неподвижной плоскости



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) =$$

$$= \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2 + \underbrace{\vec{v}_c \sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_{=0}$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_i m_i \vec{v}_i - m \vec{v}_c = 0$$

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2$$

K = сумма K движения центра и K движения относительно центра

В частности, при плоском движении твёрдого тела

$$K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$$

⑦ Кёнига

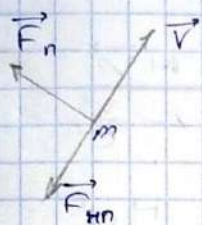
I — момент инерции тела, относительно оси, проходящей через центр масс

§13 Закон сохранения энергии в механике

Опр Полная мех. энергия $= K + \Pi \stackrel{\text{def}}{=} E$

Закон изменения E

У мат. точки, которая движется под действием Π и не- Π энергии



$$dK = dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}_n d\vec{r} + \vec{F}_{нп} d\vec{r} =$$

$$= dA_n + dA_{нп} = -d\Pi + dA_{нп}$$

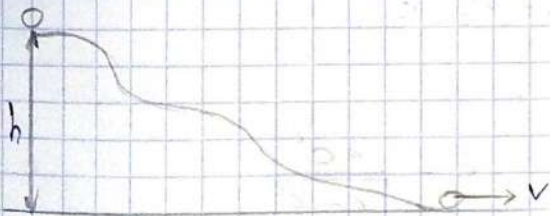
$$d(K + \Pi) = dA_{нп} = dE$$

$$dE = \text{работе не-}\Pi \text{ сил}$$

приращение полной
мех. энергии системы

Если же $A_{нп} = 0$, то полная мех. энергия системы сохраняется $E = \text{const}$

$A_{нп} = 0 \Rightarrow E = K + \Pi = \text{const}$ закон сохранения энергии в классической механике



$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

§14 Импульс и энергия в теории относительности

Опр релятивистский импульс мат. т.) - величина, опред. формулой:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Опр релят. энергия

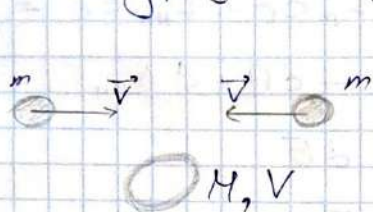
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Для системы частиц: $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ $E = \sum_i E_i$

Если $\sum \text{внешних сил} = 0$, то $\vec{p}$ и E сохраняются
 эти два закона действуют всегда вместе

закон сохранения энергии — следствие закона сохранения импульса и принципа относительности

Пример неупругий удар



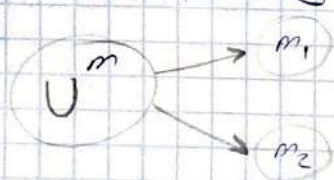
$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$V=0 \quad M = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m$

это означает, что возможны
 взаимные превращения массы и энергии

Решение задачи урана



$$E = (m - m_1 - m_2)c^2$$

Фотон

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E \cdot \vec{v} = \vec{p} c^2$$

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

Положим $m=0$ (у некоторых частиц)

⇓

Для таких частиц $E = pc$

Опр Фотон — это частица, энергия и импульс, которой связаны соотношением $E = pc$ и скоростью, которой равна c в вакууме

отсюда ⇒ вывод о том, что свет оказывает давление на поглощающие, отражающие и пропускающие свет тела

$$F = \dot{p} = \frac{\dot{E}}{c} = \frac{P}{c}, \quad P - \text{мощность света}$$

Опр Сила светового давления — отношение мощности света к c

$$F_{\text{сд}} = \frac{P}{c}$$

$$P = 10^3 \text{ Вт} \Rightarrow F \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$$

§ 15

Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.

Опр момент импульса частицы - векторное произведение $\vec{r}$ частицы и её импульса

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] \quad [\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}]$$

Опр момент импульса системы частиц - сумма $\vec{N}_i$ отдельных частиц системы

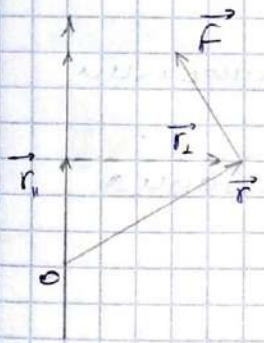
$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

Опр момент силы - векторное произведение $\vec{r}$ точки приложения силы и вектора силы

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad [\text{Н} \cdot \text{м}]$$

Опр моменты относительно оси как проекция вектора момента на эту ось

как найти момент силы относительно оси



разложим $\vec{r}$ и $\vec{F}$ на составл.
 $\parallel$ и $\perp$ оси

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \quad \vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}] =$$

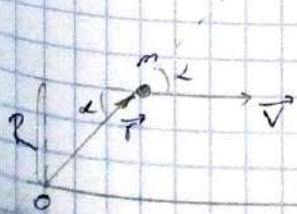
$$= \underbrace{[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\parallel}]}_0 + \underbrace{[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}]}_{\vec{M}_{\perp}} + \underbrace{[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}]}_{\vec{M}_{\parallel}} + \underbrace{[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]}_{\vec{M}_{\parallel}}$$

$$\vec{M}_{\parallel} = [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]$$

Чтобы найти составл. момента $\parallel$ некоторой оси нужно взять в векторном произведении компоненты векторов $\perp$ этой оси

$$\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{\perp}, m\vec{v}_{\perp}]$$

① момент импульса мат. точки

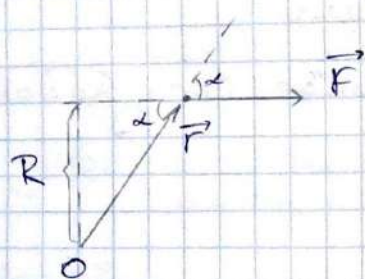


$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] \quad \otimes$$

$$N = mvr \sin \alpha = mv \cdot R$$

R - расстояние от начала отсчета до линии движения точки

момент силы:



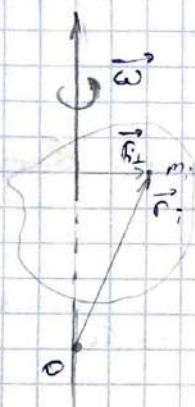
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M = F r \sin \alpha = R \cdot F$$

↑
плеча силы

② момент импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

найдем составл. момента импульса // оси вращения



$$\vec{N}_i = [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_i]$$

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]$$

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_{i\perp}, m [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] =$$

$$= \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot I$$

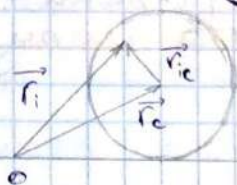
↑
момент инерции

③ момент импульса относительно оси вращения



$$N_z = \omega_z \cdot I, \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

④ момент импульса тела при произвольном движении



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}] = \\ &= [\vec{r}_c, m \vec{v}_c] + [\vec{r}_c, \sum_i m_i \vec{v}_{ic}] + [\sum_i m_i \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c] + \\ &+ \sum_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}] \quad \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad \vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = m \vec{v}_c - m \vec{v}_c = 0$$

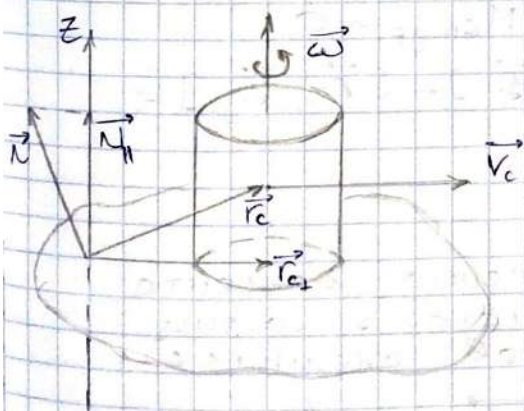
$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}, \quad \vec{N}_c = [\vec{r}_c, m \vec{v}_c], \quad \vec{N}_{oc} = \sum_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}]$$

⑤ плоское движение тела

найдем составл. момента импульса || оси вращения



$$\begin{aligned} \vec{N}_n &= \vec{N}_{c_n} + \vec{N}_{oc_n} \\ \vec{N}_n &= [\vec{r}_{c_\perp}, m \vec{v}_c] + I \vec{\omega} \quad (I = I_c) \end{aligned}$$



§16 теорема моментов. закон сохранения момента импульса

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$\dot{\vec{N}} = [\underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\vec{v}}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \underbrace{m\dot{\vec{v}}}_{m\vec{a} = \vec{F}}] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$

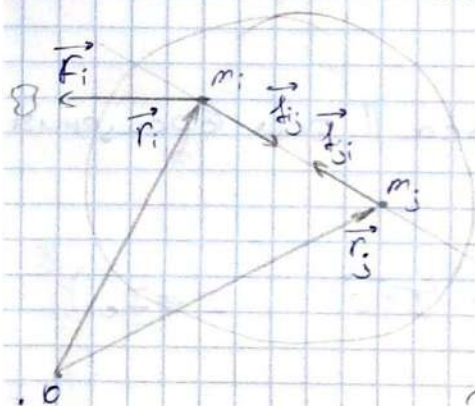
$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$

скорость изменения момента импульса частицы равна моменту, действующей на нее сил

4 систему частиц

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m\vec{v}_i]$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i \underbrace{(\dot{\vec{r}}_i, m\vec{v}_i)}_{=0} + [\vec{r}_i, m\dot{\vec{v}}_i]$$



$$-\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$$

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

$$\dot{\vec{N}} = \underbrace{\sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]}_{M_{\text{внешн.}}} + \underbrace{\sum_{ij} [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}]}_{M_{\text{внутр.}}}$$

Для системы $\sum M_{\text{внутр.}} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{ij} &= [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}] = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] - [\vec{r}_j, \vec{F}_{ij}] = \\ &= [\underbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_j}_{\text{колл. вектор}}, \vec{F}_{ij}] = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш.}}$$

скорость изменения момента импульса системы частиц = $\sum$ моментов внешних сил

Если же $\sum M_{\text{внеш.}} = 0$, то $\vec{N} = \text{const}$

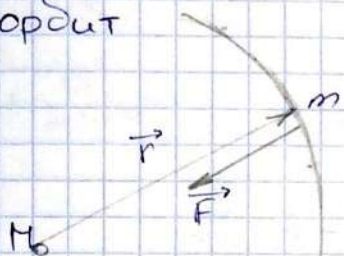
Закон сохранения момента импульса относительно оси:

Если $\exists$ такая ось, относительно которой $\sum$ моментов внешних сил = 0, то относительно этой оси момент импульса системы сохраняется

§17 Материальная точка в центральном поле

Законы Кеплера

- 1) Планеты солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце
- 2) За равные промежутки времени радиус-вектор планеты охватывает равные площади
- 3) Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит

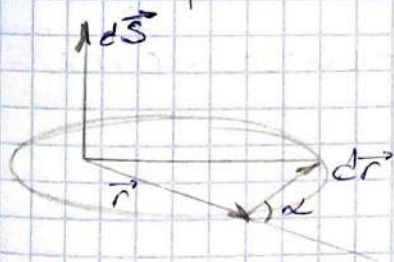


$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$$

Итак, при движении в центр поля сохраняется момент импульса материальной точки $\Rightarrow$

- такое движение является плоским
- секторная скорость движения сохраняется



$$d\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{r}] - \text{секторная площадь}$$

$$dS = \frac{1}{2} r dr \sin \alpha,$$

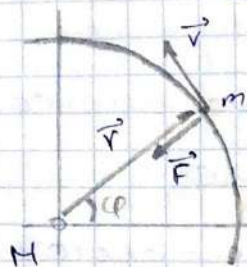
$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

секторная скорость

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}] = \frac{1}{2m} [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2m} \vec{N} = \text{const}$$

Вывод 1-го закона Кеплера



Используем закон сохранения энергии и момента импульса

$$E = K + U = \text{const}$$

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$U = -G \frac{Mm}{r}$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$$

$$A \equiv G M m \Rightarrow U = -\frac{A}{r}$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{A}{r} = E = \text{const}$$

$$\vec{N} = m[\vec{r}, \vec{v}] = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m\vec{k}(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

$$m(x\dot{y} - \dot{x}y) = N = \text{const} \quad - \text{проекция на ось } z$$

Введём полярные координаты :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x\dot{y} - \dot{x}y &= r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) r \sin \varphi \\ &= r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi = r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \end{aligned}$$

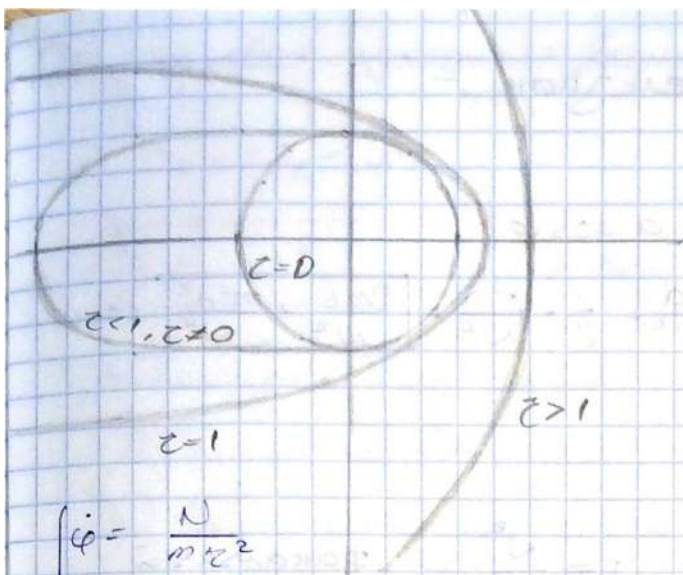
$$N = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \xrightarrow{\text{подставим в } K}$$

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{A}{r} = E$$

В этих координатах траектория движения частицы описывается φ -а $r(\varphi)$

$$r(\varphi) = \frac{P}{1 + \epsilon \cdot \cos \varphi}$$



$z=0$ окружность

$z<1$ эллипс

$z=1$ парабола

$z>1$ гипербола

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mz^2}$$

$$\dot{z}^2 + z^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{2A}{mr} = \frac{2E}{m}$$

$$\dot{z}^2 + \frac{N^2}{m^2 z^2} = \frac{2E}{m} + \frac{2A}{mz} \Rightarrow \dot{z} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mz} - \frac{N^2}{m^2 z^2}} = \frac{dz}{dt}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mz^2} = \frac{d\varphi}{dt}$$

разделим те ур-е на $\dot{z}$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \pm \frac{mz^2}{N} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mz} - \frac{N^2}{m^2 z^2}} = \pm z^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 z} - \frac{1}{z^2}}$$

$$s \equiv \frac{1}{z} \Rightarrow ds = -\frac{dz}{z^2}$$

введем новую переменную

$$\pm d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} s - s^2}}$$

выделим под корнем полный квадрат

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} s - s^2 &= \frac{2mE}{N^2} - \left(s^2 - 2s \frac{mA}{N^2} + \left(\frac{mA}{N^2} \right)^2 - \left(\frac{mA}{N^2} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{2mE}{N^2} - \left(s - \frac{mA}{N^2} \right)^2 + \frac{m^2 A^2}{N^4} \end{aligned}$$

$$\text{Обозначим } \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4} \equiv a^2$$

$$s - \frac{mA}{N^2} \equiv x \Rightarrow dx = ds$$

$$\pm d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d(\arcsin \frac{x}{a})$$

$$\arcsin \frac{x}{a} = \pm \varphi + \text{const}$$

Положим $\cos \alpha = \frac{\pi}{2}$ и выберем знак '-'

$$\arcsin \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi \Rightarrow x = a \cos \varphi$$

$$x = S - \frac{mA}{N^2} = \frac{1}{2} - \frac{mA}{N^2} = \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4}} \cos \varphi$$

$$z = \frac{mA}{N^2} + \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4}} \cos \varphi$$

$$z = \frac{\frac{N^2}{mA}}{1 + \sqrt{\frac{2N^2 E}{mA^2} + 1} \cos \varphi}$$

$$p \equiv \frac{N^2}{mA} \quad \text{фокальный параметр орбиты}$$

$$e \equiv \sqrt{\frac{2N^2 E}{mA^2} + 1} \quad \text{эксцентриситет орбиты}$$

$$z(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

$$A \equiv GmM$$

§18 Плоское движение твёрдого тела

два основных ур-я описывают это движение:

1) ур-е движения центра масс

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш.}}$$

2) ур-е вращения

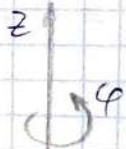
4 вращение вокруг неподвижной оси

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$$

спроектируем это равенство на ось вращения тела

$$\dot{N}_z = M_z$$

$$N_z = I \omega_z, \quad \omega_z = \dot{\varphi}, \quad I - \text{момент инерции}$$



Спр угловое ускорение вращения тела - производная угловой скорости по времени

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}_z$$

$$\boxed{I \varepsilon_z = M_z} \quad - \text{зр-е вращения тела}$$

этими зр-ми можно пользоваться в двух случаях:

1) для неподвижной оси

2) для движущейся оси, проходящей через центр масс тела

пример: 1) Физ. маятник -

Ор - тело произвольной формы, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения

Найдём суммарный момент сил тяжести

$$\vec{M} = \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{g}] = [\sum m_i \vec{r}_i, \vec{g}] = [m \vec{r}_c, \vec{g}] = [\vec{r}_c, m \vec{g}]$$

это значит, что $\sum$ момент F_T , действ. на тело, таков, как если бы вся масса тела находилась в его ц.м.

$$\vec{M}_n = [\vec{r}_{c_n}, m \vec{g}]$$

$$M_z = -M_n$$

$$M_n = \varepsilon_{cn} m g \sin \varphi = l m g \sin \varphi$$

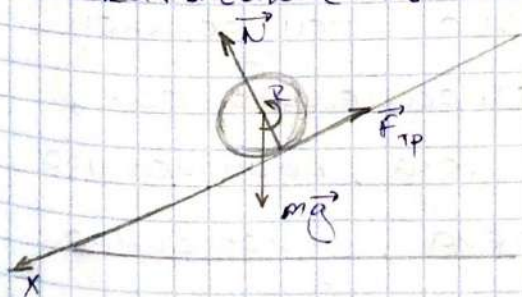
$$M_z = -m g l \sin \varphi$$

$$I \varepsilon_z = I \ddot{\varphi} = M_z = -m g l \sin \varphi$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{m g l}{I} \sin \varphi = 0} \quad \text{зр-е колебаний маятника}$$

l - расстояние от оси вращения до центра масс

2) скатывание цилиндра по наклонной плоскости



считаем, что катится без проскальз.

$$\begin{cases} m \ddot{x} = m g \sin \alpha - F_{тр} \\ I \varepsilon_z = F_{тр} \cdot R \\ x = R \varphi \Rightarrow \ddot{x} = R \varepsilon_z \end{cases}$$

$$I \varepsilon_z = F_{тр} \cdot R$$

$$x = R \varphi \Rightarrow \ddot{x} = R \varepsilon_z$$

$$F_{TP} = \frac{I \ddot{\varphi}}{R} = \frac{I}{R} \cdot \frac{\ddot{x}}{R} = \frac{I \ddot{x}}{R^2}$$

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha - \frac{I \ddot{x}}{R^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{m R^2}}$$

Свобода формул по плоскому движению твёрдого тела:

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш.}}$$

$$I \ddot{\varphi} = M_z, \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}$$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Вращение тела вокруг неподвижной оси:

$$K = \frac{I \omega^2}{2}$$

$$\vec{N}_0 = I \vec{\omega}$$

Произвольное плоское движение:

$$\text{Th Кёнига: } K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$$

$$\vec{N}_0 = [\vec{r}_c, m \vec{v}_c] + I \vec{\omega}$$

§19 Момент инерции твёрдого тела

Опр момент инерции относительно оси наз.

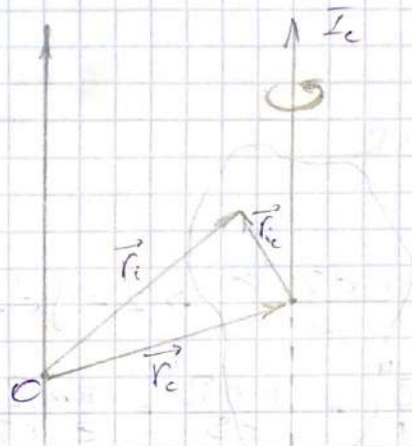
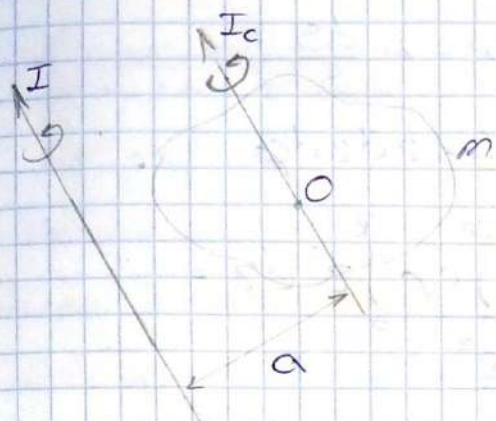
величина; определяемая формулой

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

⑦h Гюйгенса - Штейнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела, параллельно первой, плюс полная масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями

$$I = I_c + m\alpha^2$$



$$I = \sum_i r_{i\perp}^2 m_i = \sum_i m_i (\vec{r}_{i\perp}, \vec{r}_{i\perp}) = \sum_i m_i (\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}, \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}) =$$

$$= m r_{c\perp}^2 + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{c\perp} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp}}_{=0} + \sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp}^2$$

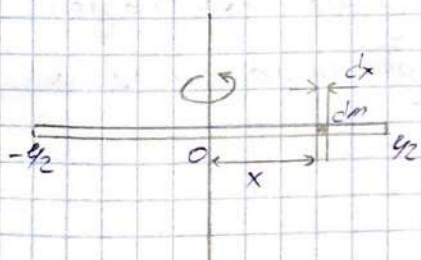
Для док-ва $\Rightarrow$ вспомогательный вектор:

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = \sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{r}_c = 0, \text{ т.к.}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Примеры

1) момент инерции стержня относительно центра



Представим стержень как совокупность мат. т. и найдём скаляр элементарный момент инер.

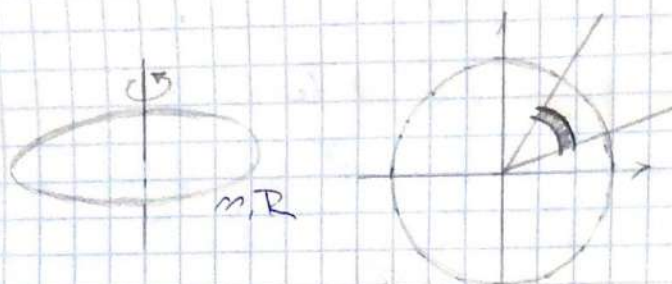
$$\begin{cases} dI = x^2 dm \\ dm = \frac{m}{l} dx \end{cases} \Rightarrow dI = x^2 \cdot \frac{m}{l} dx \Rightarrow$$

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{mx^3}{3l} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{ml^2}{12}$$

2) момент инерции стержня относительно оси, проходящей через край

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} \quad \text{по Th Гюйгенса - Штейнера}$$

3) момент инерции диска



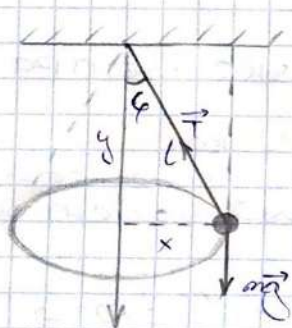
$$\begin{cases} dI = r^2 dm \\ dm = m \frac{dS}{S} \\ dS = r dr d\varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dI &= r^2 m \frac{r dr d\varphi}{S} \Rightarrow I = \int dI = \frac{m}{S} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \\ &= \frac{m}{S} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi m R^4}{2S} = \frac{\pi m R^4}{2 \cdot \pi R^2} = \frac{m R^2}{2} \\ S &= \int dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2 \end{aligned}$$

§20 Системы со связями

Степени свободы. Обобщённые координаты

Опр Связи в механике — невытекающие из ур-ий движения ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механической системы



$$x^2 + y^2 = l^2$$

В системах со связями действуют силы двух типов: заданные силы и силы реакции

Опр Заданные — зад. известные постоянные силы или известные ф-ии координат и скорости частиц

Опр Силы реакции — это силы, которые действуют на тела системы со стороны тел, осуществляющих связи

$$m\ddot{\vec{z}} = m\vec{g} + \vec{T}$$

$$x: m\ddot{x} = T_x, \quad T_x = -T \sin \varphi$$

$$y: m\ddot{y} = mg + T_y, \quad T_y = -T \cos \varphi$$

$$x(t) = ?$$

$$y(t) = ?$$

$$\dot{\varphi}(t) = ?$$

Классификация связей

① Голономные и неголономные

Опр Голономной наз. связь, которая сводится к ограничению только на координаты тел

$$(x^2 + y^2 = l^2, x = R\varphi)$$

Неголономная - иначе: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$

Далее $\rightarrow$ только голономные связи

② Стационарные и нестационарные связи

Опр Стационарной наз. связь, уравнение которой не содержит времени в явном виде ($x^2 + y^2 = l$)

Нестационарная - иначе: $x^2 + y^2 = l(t)$

Опр число степеней свободы системы - число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве (s)

Опр Обобщённые координаты - N s координат, полностью определяющих положение системы в пространстве

$$q_i, i = \overline{1, s}; \{q\}$$

Опр Обобщённые скорости - производные по времени обобщённых координат

$$\dot{q}_i, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; \{\dot{q}\}$$

Пример:

1) Если система состоит из отдельных мат. т.

$$s = 3N - K, \quad N - \text{число тел}, \\ K - \text{число связей}$$


$$s = 6$$


$$s = 5$$


$$s = 6$$

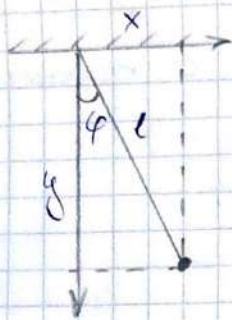


$$s = 6 \text{ (произвольное твёрдое тело)}$$

Радиус-векторы точек системы являются однозначными φ -ми обобщённых координат

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad i = \overline{1, N}$$

Обобщённые координаты обращают в тождества уравнения связи



$$s=1 \quad q=\varphi$$

$$\begin{cases} x=L\sin\varphi \\ y=L\cos\varphi \end{cases}$$

$$x^2+y^2=L^2$$

§21

Виртуальное перемещение

Виртуальная работа. Идеальные связи

Опр Виртуальное перемещение — это воображаемое $\delta \vec{r}_i$ перемещение точки, допускаемое связями в данный момент времени t

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t)$$

Положим $t = \text{const}$ и возьмём дифференциал радиус-вектор точки:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Опр Виртуальная работа — это работа силы на виртуальном перемещении

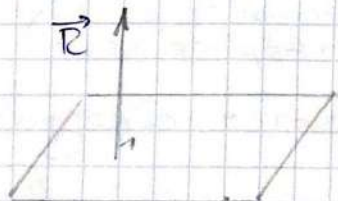
$$\delta A = \vec{F} \delta \vec{r}$$

Опр Идеальные связи — это связи, для которых виртуальная работа сил реакции = 0

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

Примеры

① Идеально гладкая поверхность



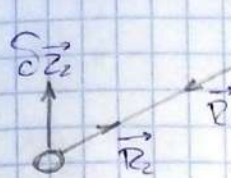
$$\delta A_R = \vec{R} \delta \vec{r} = 0$$

② Каземье без проскальзывания



$$\delta A_R = \vec{R} \delta \vec{z} = 0 \quad (\text{т.к. } \delta \vec{z} = 0)$$

③ Жёсткий невесомый стержень



$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$$

$$\delta A_R = \vec{R}_1 \delta \vec{z}_1 + \vec{R}_2 \delta \vec{z}_2 = (\vec{R}_1, \delta \vec{z}_1 - \delta \vec{z}_2) = -(\vec{R}_1, \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2)) = (\vec{R}_1, \delta \vec{z})$$

$$R_1 = \alpha z \Rightarrow \delta A_R = \alpha \vec{z} \Delta \vec{z} = \alpha \vec{z} \delta \vec{z} = \frac{1}{2} \alpha \underbrace{\delta(l^2)}_{=0} = 0 \quad \text{зависит от const}$$

§22

уравнения Лагранжа

Обобщённые силы

→ системы с идеальными голономными связями

$$\vec{z}_e = \vec{z}_e(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\delta \vec{z}_e = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{z}_e}{\partial q_j} \delta q_j \quad j = \overline{1, N}$$

$$\delta A_R = \sum_{e=1}^N \vec{R}_e \delta \vec{z}_e = 0$$

ур-я движения для отдельной точки системы:

$$m_e \ddot{\vec{z}}_e = \vec{F}_e + \vec{R}_e \quad e = \overline{1, N}$$

Исключим силы реакции

$$\sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{z}}_e - \vec{F}_e) \delta \vec{z}_e = 0$$

$$\sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{z}}_e - \vec{F}_e) \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{z}_e}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{z}}_e - \vec{F}_e) \frac{\partial \vec{z}_e}{\partial q_j} = 0$$

Обозначим $X_j = \sum_{e=1}^N m_e \ddot{\vec{z}}_e \frac{\partial \vec{z}_e}{\partial q_j}$ $Q_j = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{z}_e}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^s \delta q_j (X_j - Q_j) = 0 \Rightarrow X_j = Q_j \quad j = \overline{1, s}$$

Докажем, что величины X_j можно выразить через кинетическую энергию силы

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i \vec{V}_i, \quad \vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

$$\vec{V}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \vec{V}_i = \vec{V}_i(q, \dot{q}, t)$$

$$K = K(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i \vec{V}_i \right) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{V}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} = X_j + \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$V_j: X_j = Q_j: \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j}$$

чл-е Лагранжа относительно K

Обобщённая сила

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad [Q] = \frac{H \cdot m}{[q]} = \begin{cases} H, & [q] = m \\ H \cdot m, & [q] = 1 \end{cases}$$

физ. смысл: Q_j — проекция силы на ось или момент силы относительно оси

§23 Ф-я Лагранжа. Обобщённые импульсы

§ системы с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами

$$\vec{F}_i = - \text{grad } \Pi_i, \quad \Pi_i = \Pi_i(q, t)$$

$$\vec{F}_i = - \left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} + \vec{j} \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_i} + \vec{k} \frac{\partial \Pi_i}{\partial z_i} \right)$$

$$\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_i}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \Pi_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

$$\boxed{Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad \Pi = \sum_{i=1}^N \Pi_i = \Pi(q, t)$$

Ф-я Лагранжа (Лагранжиан)

- разность кин. и потен. энергии системы, выраженная через обобщ. коорд., обобщ. скорости и время

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad j = \overline{1, s}$$

Ур-е Лагранжа относительно функции Лагранжа

Опр Обобщённый импульс - частные производные Ф-и Лагранжа по обобщённой скорости

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad j = \overline{1, s} \quad [P] = \frac{[Q] \cdot [C]}{[q]}$$

$$[q] = u \Rightarrow [P] = [mv]$$

$$[q] = l \Rightarrow [P] = [mvr]$$

Физ. смысл: обобщ. импульс - проекция импульса на ось или момент импульса относительно некоторой оси

- Закон изменения обобщённого импульса

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \Rightarrow \text{скорость изменения обобщённого импульса равна частной производной ф-и Лагранжа по соотв. обобщ. коорд.}$$

Циклическая обобщённая координата

Опр - координата, которая не входит явно в ф-ю Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{const}$$

- Закон сохранения обобщённого импульса :

о. импульс, соотв. ^{циклической} о. координате сохраняется

§24 ур-е Гамильтона. Канон. переменные

Опр канон. переменные - о. коорд и о. импульсы системы

ур-е дв-я, записанное в этих перемен. наз.

ур-ем Гамильтона

× системы с идеал. голономными связями и потенц.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \rightarrow \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad \text{законными силами}$$

$$L = K - U = L(q, \dot{q}, t)$$

запишем дифф. ф-ю Лагранжа

$$dL = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dL = \sum_{j=1}^s (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$H \equiv \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L$$

$$dH = \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - dL =$$

$$= \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \dot{p}_j dq_j - p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt) =$$

$$= \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (*)$$

Выразим H через канон. перем. и время

$$H = H(q, p, t)$$

$$dH = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (**)$$

приравняем коэф. (*) и (**) при одинаковых дифф.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

урав-я Гамильтона

$$H = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L = H(q, p, t) \quad \text{— ф-я Гамильтона (гамильтониан системы)}$$

§25 Гамильтониан консервативной системы

$$\text{закон изменения: } \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

используя урав-я Гамильтона получим:

$$= \sum_{j=1}^s (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

консервативные системы

Опр — система гам. которой не зависит явно от времени, т.е. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$, $H = H(q, p) = \text{const}$

Таким образом, гам. конс. системы не меняется с течением времени

покажем, что гам. конс. системы имеет смысл её полной мех. энергии

$$H = K + \Pi = H(q, p)$$

$$H = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (K - \Pi) = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e \vec{V}_e \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_e = \dot{\vec{r}}_e, \quad \vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \dots, q_s)$$

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \Rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \Rightarrow$$

(*) $K_{\alpha\beta}(q) = K_{\beta\alpha}(q)$ - симм. матрица

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 K_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$P_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 K_{\alpha\beta} \left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_\beta \right) = \sum_{\alpha=1}^3 K_{\alpha j} \dot{q}_\alpha$$

$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha=\beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^3 K_{\alpha\beta} \delta_{\beta j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \dot{q}_\beta \sum_{\alpha=1}^3 K_{\alpha\beta} \delta_{\alpha j} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \dot{q}_\alpha K_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \dot{q}_\beta K_{j\beta} = \sum_{\alpha=1}^3 K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha \quad j=1, 2, 3$$

$$\boxed{P_j = \sum_{\alpha=1}^3 K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha}$$

$$H = \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j P_j - L = \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \sum_{\alpha=1}^3 K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha - L = \sum_{j=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - L =$$

(*)

$$= 2K - L = 2K - (K - \Pi) = K + \Pi \quad !$$

Пример

зам. частицы в потенци. силовом поле

$$m, \quad \Pi = \Pi(x, y, z)$$

$$s=3: \quad q_1=x \quad q_2=y \quad q_3=z$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\dot{q}_1=\dot{x} \quad \dot{q}_2=\dot{y} \quad \dot{q}_3=\dot{z}$$

$$P_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{2} \cdot 2\dot{x} = m\dot{x} = P_x$$

$$P_y = m\dot{y} \quad P_z = m\dot{z}$$

$$\dot{x} = \frac{P_x}{m} \quad \dot{y} = \frac{P_y}{m} \quad \dot{z} = \frac{P_z}{m} \Rightarrow K = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)$$

$$H = K + \Pi = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

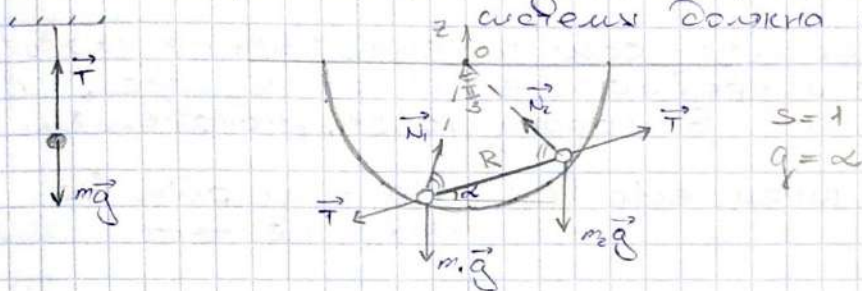
§26 Равновесие системы и её устойчивость

Опр равновесие — состояние, в котором система предоставленная самой себе может находиться сколько угодно долго

условие равновесия: проинтегрируем (1)

$$(1) \quad \vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, N}$$

состояние равновесия: сумма сил, действующих на каждую мат. т. системы должна быть $= 0$



2 системы с идеальными связями: $\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

в состоянии равновесия виртуальная работа заданных сил должна быть равна нулю

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \delta q_j \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0$$

из независимости обобщ. коорд. $\Rightarrow Q_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, s}$ (3)

в общем случае: $Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = \overline{1, s}$ (4)

физ. смысл: в сост. равн. потенц. энергия имеет extr по всем обобщ. коорд.

$$\text{Задача: } \Pi = m_1 g z_1 + m_2 g z_2, \quad z_1 = -R \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \\ z_2 = -R \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$\Pi = -m_1 R g \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - m_2 R g \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \Pi(\alpha)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = -m_1 R g \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + m_2 R g \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0$$

$$-m_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + m_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0$$

$$-m_1 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) + m_2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) = 0$$

$$-m_1 (1 - \sqrt{3} \tan \alpha) + m_2 (1 + \sqrt{3} \tan \alpha) = 0$$

$$\sqrt{3} \tan \alpha (m_1 + m_2) = m_1 - m_2$$

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3}(m_1 + m_2)} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

Опр устойчивость равновесия: если система, выведенная из этого состояния и предоставленная самой себе, начинает двигаться в сторону полож. равновесия

уст. равн. опред. типом экстр Π : $\min$ — устойчиво
 $\max$ — не —

§27 Колебания в системах с одной степенью свободы

Опр колебания — повтор. движения в окр. положения устойчивого равновесия системы

ур-е гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x - \text{отклонение обобщ. коорд. от положения равновесия}$$

ω — частота колебаний

общее решение: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

A — амплитуда колебаний — max отклонение обобщ. коорд. от равновесного значения

период колебаний T [с] — продолжительность 1 полного колебания системы

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

φ - нач. фаза колебаний

$\Phi = \omega t + \varphi$ - фаза колебаний

Опр фаза - аргумент тригонометрической ф-и, описывающей процесс колебания

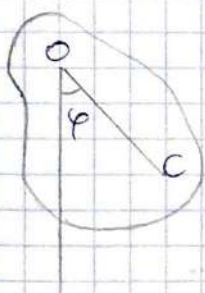
найдем A и φ :

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = A \cos \varphi \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = -A\omega \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A} \quad \sin \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{A\omega}$$

Как найти ω ? - написать ур-е движения системы и привести его к стандартному виду ур-е гармон. колеб. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

пример: физ. маятник



$$s = l, \quad q = \varphi, \quad \dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$$

$$K = \frac{I \dot{\omega}^2}{2} = \frac{I \dot{\varphi}^2}{2}$$

$$P = -mgl \cos \varphi$$

$$L = K - P = L(q, \dot{q})$$

$$L = \frac{I \dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi = L(\varphi, \dot{\varphi})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Leftrightarrow I \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \sin \varphi = 0$$

В случае малых колебаний $\varphi \ll 1 \Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

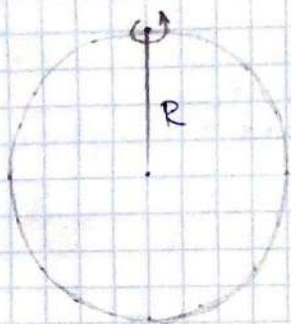
m - полная масса маятника

g - ускорение свободного падения

l - расстояние от оси вращ. до центра масс

I - момент инерции маятника отн. оси вращения

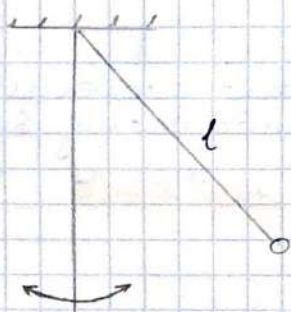
Пример обруч



$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$I = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

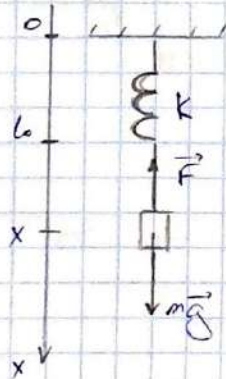
Пример матем. маятника



$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ф-ла Гюгенса

Пример пружинный осциллятор



$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x} + k(x - l_0) - mg = 0$$

$$m\ddot{x} + k\left(x - l_0 - \frac{mg}{k}\right) = 0, \quad \ddot{x} = \ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

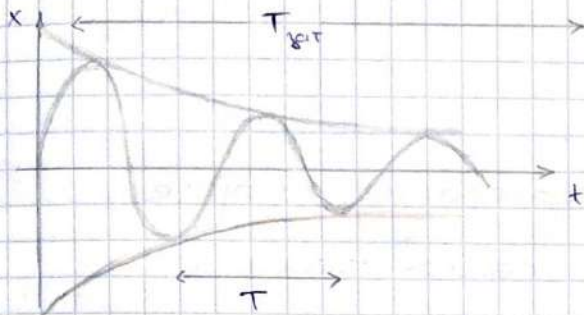
$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

§28 Физ. эффекты в колебательных системах

① затухание колебаний

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0$$



$$Q = \frac{T_{\text{зат}}}{T} - \text{добротность}$$

② зависимость периода от амплитуды колебания

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (l\dot{\varphi})^2$$

$$\Pi = -mgl \cos \varphi$$

$$E = K + \Pi = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi$$

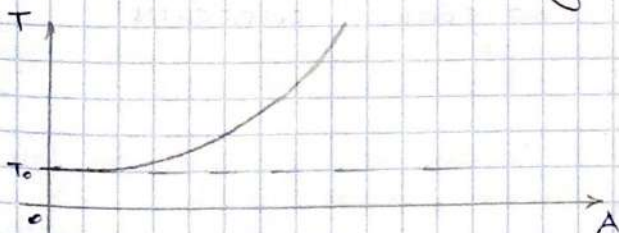
$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l} \cos \varphi \Rightarrow \dot{\varphi} = \pm \sqrt{\underbrace{\frac{2E}{ml^2}}_a + \underbrace{\frac{2g}{l}}_b \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\pm dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{a + b \cos \varphi}}$$

$$\pm \int_0^t dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a + b \cos \varphi}}$$

эллиптический интеграл

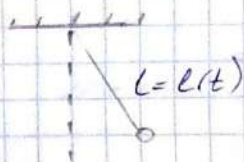
не выраж. через эле. ф-и



этот эффект характерен
для нелинейных
колебаний

③ параметрический резонанс

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$$



④ резонанс

Опр 4 Вынужденные колебания — колебания, которые происходят под действием периодически изменяющихся внешних сил

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad f(t) = f_0 \cos \omega t$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

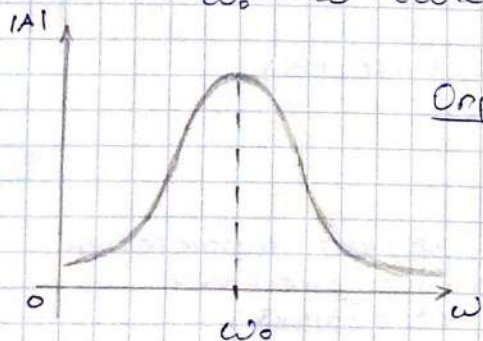
$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$+ : \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}e^{i\varphi} + \text{к.с.}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}f_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

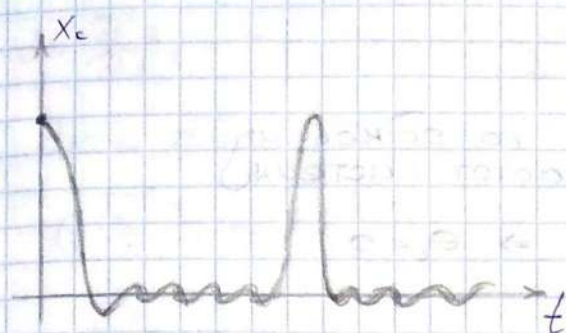
$$x(t) = \frac{1}{2}A e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha}$$



Опр

Резонанс — явление ↑ A при совпадении частоты изменения внешней силы с собствен. частотой колебания системы

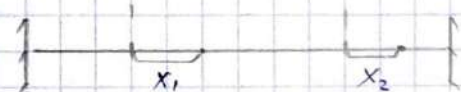


§29 Нормальные колебания и нормальные координаты

4 колебания связанных осцилляторов



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$$



смещение

у-я движения получим следующие уравнения

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Введем новые координаты: $\Theta_1 = x_1 + x_2$ $\Theta_2 = x_2 - x_1$

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}_1 + \omega_1^2 \Theta_1 = 0, & \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \ddot{\Theta}_2 + \omega_2^2 \Theta_2 = 0, & \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

Для новых коорд. получились независимые ур-я движ. и каждый из них имеет вид ур-я гармон. колебаний

эти новые коорд. наз. нормальными коорд.

Опр норм. коорд. - коорд., которые при n дв-х системы меняются независимо друг от друга

из независимости норм. коорд. $\Rightarrow$ возможны режимы колебаний, когда отлична от 0 только одна норм. коорд.

именно такие режимы колебаний наз. норм. колеб.

$$x_1 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

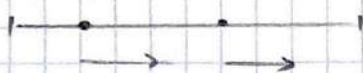
Опр корр. колеб. - гармон. колеб. на одной из собственных частот системы

1) ω_1 корр. колеб. на частоте $\omega_1 \Rightarrow \theta_2 = 0$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}$$

$$\theta_{20} = 0 \Rightarrow x_{20} = x_{10}$$

$$\dot{\theta}_{20} = 0 \Rightarrow \dot{x}_{20} = \dot{x}_{10}$$



2) $\omega_2 \rightarrow \theta_1 = 0, \theta_1^{\circ} = 0, \dot{\theta}_1^{\circ} = 0$

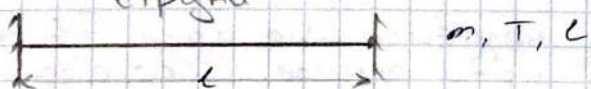
$$x_1^{\circ} = -x_2^{\circ} \quad \dot{x}_1^{\circ} = -\dot{x}_2^{\circ} = 0$$



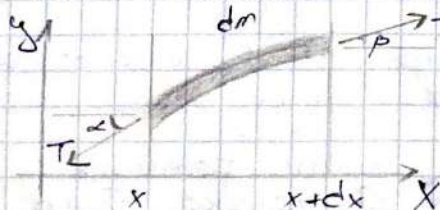
Понятие корр. колеб. и корр. колеб. имеют смысл для систем с n числом свободы

§30 Колебания струны

Опр. волна - колебания, распростран. в сплошной среде



линейная плотность струны: $\rho = \frac{m}{l} \left[\frac{кг}{м} \right]$



$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \sin \beta - T \sin \alpha$$

для малых колебаний: $\alpha, \beta \ll 1$

$$\sin \alpha \sim \tan \alpha = \left. \frac{dy}{dx} \right|_x = y'(x)$$

$$\sin \beta \sim \tan \beta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+dx} = y'(x+dx)$$

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(y'(x+dx) - y'(x)) = Ty''(x) dx$$

$$dm \approx \rho dx$$

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

$$\left[\frac{T}{\rho} \right] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right]$$

$$\frac{T}{\rho} = v^2$$

Волновое уравнение

общее реш. волнового ур-я:

$$y(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

f_1 описывает волну, бегущую вдоль оси x со скоростью v

f_2 — против оси x с такой же скоростью v

$$x - vt = \text{const} \Rightarrow dx - v dt = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = v$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Стоячая волна

— волна, которая описывается произведением ϕ -и времени на ϕ -ю координату

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y(x, t) = X(x) \cdot \Theta(t)$$

$$X \ddot{\Theta} = v^2 \Theta X'' \quad \text{разделим переменные}$$

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = v^2 \frac{X''}{X} = \text{const} \equiv -\omega^2$$

не зависит
от x

не зависит
от t

$$\ddot{\Theta} + \omega^2 \Theta = 0$$

$$X'' + k^2 X = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

частные реш. этих ур-й

$$\Theta(t) = A \sin \omega t$$

$$X(x) = B \sin kx$$

$$\Rightarrow y(x, t) = C \sin kx \cdot \sin \omega t$$

граничные условия:

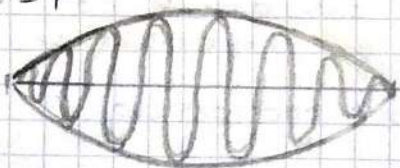
$$y(x=0) = 0, \quad y(x=l) = 0$$

$$\Rightarrow X(x=0) = X(x=l) = 0$$

$$\sin kl = 0 \Rightarrow kl = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Обозн. } k_n = n \cdot \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$n=1$



$n=2$



$n=3$



узлы
стоячей
волны $A=0$

пучки
стоячей волны: $A = \max$

$$k = \frac{\omega}{v} \rightarrow \omega_n = v \cdot k_n$$

$$\omega_n = v \left(n \cdot \frac{\pi}{l} \right) = \sqrt{\frac{T}{m}} n \frac{\pi}{l} = \pi n \sqrt{\frac{T}{lm}}$$

$n=1$. ω_1 - частота тона

$n=2, 3$ $\omega_{2,3}$ - частота обертона

§31 Случайные величины и вероятности

Опр случ. событие - событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторить

Опр вероятность случ. события - отношение числа появл. событий в серии испытаний к полному числу испытаний в пределе, когда число испытаний $\rightarrow \infty$

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

$$0 < P < 1$$

$P=1$ - достоверное событие

$P=0$ - невозможное событие

• аксиома сложения вероятностей

вероятность наступления одного из взаимноисключающих событий равна сумме их вероятностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

• аксиома умножения вероятностей

вероятность наступления несовм. случ. событий равна произвед. их вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Опр случ. величина - величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно многократно повторить

(пример: коорд. брауновской частицы)

Опр распределение плотности вероятности - отношение

вероятности появления случ. величины в малый интервал в единицу вероятного значения в пределе, когда длина интервала $\rightarrow 0$

$$\omega(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x}, \quad x - \text{случ. величина}$$

$$\omega \geq 0 \quad [\omega] = \frac{1}{[x]}$$

условие нормировки $\int \omega(x) dx = 1$

правило вычисления средних:

$$\bar{f}(x) \equiv \langle f(x) \rangle = \int f(x) \omega(x) dx$$

среднее знач. слуг. величины — мат. ожидание

$$\bar{x} = \int x \cdot \omega(x) dx$$

Дисперсия — средний квадрат отклонения
слуг. вел. от её среднего значения

$$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

• Гаусово распределение

$$\omega(x) = C e^{-\alpha x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Многомерная плотность вероятности

Опр — отношение вероятности попадания нескольких
случайных величин в малые интервалы величин
заданных значений к произведению величин интервалов
в пределе, когда все интервалы стремятся к 0.

$$\omega(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

нормировка

$$\iint \omega(x, y) dx dy = 1$$

Правило вычисления средних

$$\bar{f} = \langle f \rangle = \iint f(x, y) \cdot \omega(x, y) dx dy$$

Получение порядка распределения

$$\omega_1(x) = \int \omega(x, y) dy$$

$$\omega_2(y) = \int \omega(x, y) dx$$

Независимые случайные величины:

для n -многомерная плотность вероятности равна произведению одномерных плотностей

$$\omega(x, y) = \omega_1(x) \cdot \omega_2(y)$$

§52 Распределение Гиббса

основной закон статистической механики

равновесных систем:

В состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для физических состояний системы определяется формулой Гиббса

$$\omega(z) = C \cdot e^{-\frac{H(z)}{kT}}$$

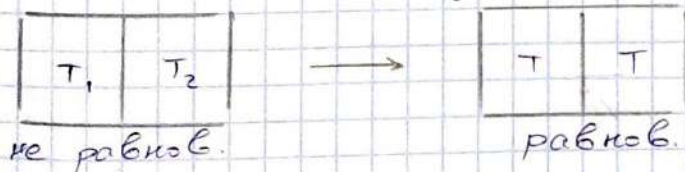
$$C = \text{const}, \quad H = K + \Pi, \quad z = \{q, p\}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/градус}$$

T - абсолютная температура

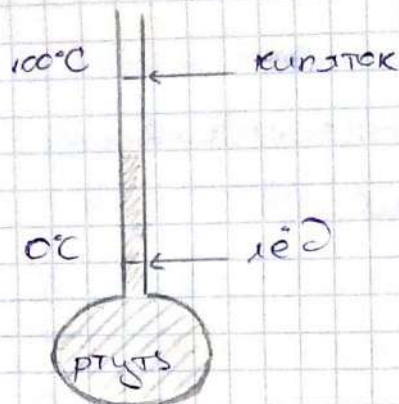
$$T = t + 273^\circ, \quad t - \text{темпер. в } ^\circ\text{C}$$

Спр термодин. равновесие - состояние, в котором система, предоставленная самой себе может находиться сколь угодно долго.



единица измер. темп. наз. градус Цельсия

Спр - это $\frac{1}{100}$ часть интервала между темп. плавления льда и темп-ры кипения воды при норм. усл. (н.у.)



термометр

1° распределение молекул по скоростям

$$\omega(v_x, v_y, v_z) = C e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}}$$

распределение Максвелла

Ее декартовы компоненты скорости молекул представляют собой статистически незав. слуг. велич.

$$\omega(v_x) = C e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}, \quad -\infty < v_x < +\infty$$

Задача вычислим дисперсию тепловой скорости молекул газа

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \omega(v_x) dv_x$$

$$d\omega = \omega \left(-\frac{m}{2kT} \right) 2v_x dv_x$$

$$v_x d\omega = -\frac{m}{kT} v_x^2 \omega dv_x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x d\omega = -\frac{m}{kT} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \omega dv_x$$

$$\underbrace{v_x \omega \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \omega dv_x \stackrel{\frac{1}{v_x^2}}{=} 1$$

$$\Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}$$

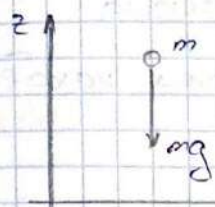
2. распределение частиц во внешнем силовом поле

$$\omega(x, y, z) = C e^{-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT}}$$

C - нормиров. постоянная
 Π - потенциал энергии

распределение Больцмана

пример: однородное поле тяжести



$$\Pi = \Pi(z) = mgz$$

$$\omega(z) = C e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad 0 \leq z < +\infty$$

Задача

найдём средн. высоту частицы
в поле силы тяжести

$$\bar{z} = \int_0^{+\infty} z \omega(z) dz = C \int_0^{+\infty} z \cdot \exp\left\{-\frac{mgz}{kT}\right\} dz$$

$$d\omega = \omega \cdot \left(-\frac{mg}{kT}\right) dz$$

$$z d\omega = -\frac{mg}{kT} z \omega dz$$

$$\int z d\omega = -\frac{mg}{kT} \int z \omega dz$$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} z \omega(z) dz}_{=0} = -\frac{mg}{kT} \underbrace{\int_0^{+\infty} z \omega dz}_{=1} \Rightarrow -1 = -\frac{mg}{kT} \cdot \bar{z} \Rightarrow \bar{z} = \frac{kT}{mg}$$

Анон
Лёвшу: *
Мур-мур
от
Анны

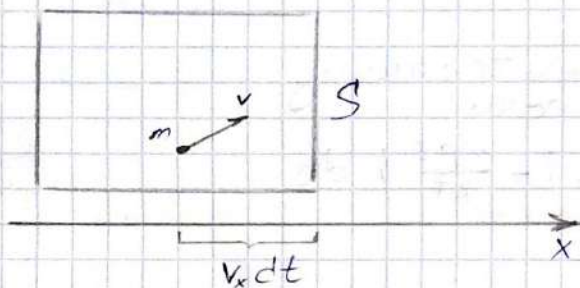
§33 Размер и масса молекул

Стр идеальный газ - газ не взаимодействующих частиц

в сосуд. V, N, T - известно $p = ?$ Савление

Стр концентрация молекул - отношение числа молекул к объёму сосуда; в котором они наход.

$$n = \frac{N}{V} [\text{м}^{-3}]$$



$$v_x \div v_x + dv_x, dt$$

$$dp = 2mv_x \cdot S v_x dt \cdot n \cdot \omega(v_x) dv_x$$

$$dp = 2mv_x^2 \cdot n \cdot \omega(v_x) dv_x [\text{Па}] \cdot \frac{1}{dv_x}$$

$$p = \int dp = 2mn \int_0^{\infty} v_x^2 \omega(v_x) dv_x = mn \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \omega(v_x) dv_x = mn \overline{v_x^2} =$$

$$= mn \cdot \frac{kT}{m} = nkT \Rightarrow \boxed{p = nkT}$$

в воздухе при н.у.: $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $T_0 = 273 \text{ К}$

$$p_0 = n_0 k T_0 \Rightarrow n_0 = \frac{p_0}{k T_0} = \frac{10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

число Лошмидта

$$n_0 = \frac{N}{V} \quad p_0 = \frac{m}{V} = \frac{m_0 \cdot N}{V} = m_0 \cdot n_0 \Rightarrow m_0 = \frac{p_0}{n_0} = 0,5 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$$

" $1,3 \text{ кг/м}^3$

жидкость несжимаема $\Rightarrow$ плотность жидкости $\approx$ плотности вещества в одной молекуле

$$\rho_{\text{ж}} = 10^3 \text{ кг/м}^3 = \frac{m_0}{d^3} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{m_0}{\rho_{\text{ж}}}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

диаметр молекул воздуха

$$\text{\AA} = 10^{-10} \text{ м} . \quad d = 3 \text{\AA}$$

оценки средн. расст. между молекулами воздуха

$$n_0 = \frac{N}{V} , \quad] N = 1$$

$$V_0 = L^3 = \frac{1}{n_0} \Rightarrow L = \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 30 \text{\AA}$$

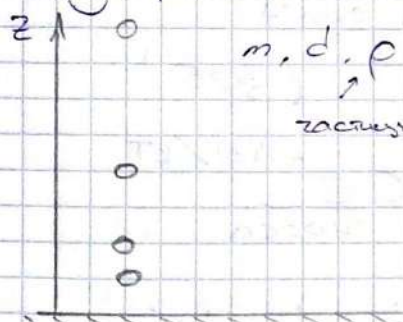
средняя тепловая скорость молекулы воздуха

$$V_T = \sqrt{\overline{V_x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{m_0}} \approx 300 \text{ м/с}$$

среднее время свободного пробега

$$\tau = 10^{-10} \text{ с}$$

измерение постоянной Больцмана . опыт Перрена



m, d, ρ, ρ_0
↑
густота среды

$$\bar{z} = \frac{kT}{mg} \Rightarrow k = \frac{mg\bar{z}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$k = \frac{(\rho - \rho_0) \frac{\pi}{6} d^3 \cdot g \bar{z}}{\tau}$$

$$\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$d = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\bar{z} = 60 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Rightarrow k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/градус}$$

§34

Распределение энергии по степеням свободы

Закон равно-распредел. энергии по степеням свободы в состоянии термодинам. равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия равная $\frac{1}{2}kT$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/градус} \quad T = t + 273$$

Ср. квадр. ст. свобода - переменная вклад которой в гамильтониан системы пропорционален квадрату этой переменной

$$H(z) = a z_1^2 + H'(z') \quad z' = z/z_1, \quad a = a/z_1^2$$

Пример гом. гасицы в поле потенц. сил

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z) \quad (\S 25)$$

$$\overline{a z_1^2} = \int a z_1^2 \omega(z) dz \in, \quad \omega(z) = C e^{-H(z)/kT}$$

распред. свобода

$$\omega(z) = C e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} \cdot e^{-\frac{H'(z')}{kT}}$$

$$dz = dz_1 \cdot dz'$$

$$\in C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{H'(z')}{kT}} dz' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} a z_1^2 \cdot e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} dz_1}_I$$

$$d e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} = e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} \left(-\frac{a}{kT} \right) \cdot 2 z_1 dz_1$$

$$a z_1 \cdot e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} dz_1 = -\frac{1}{2} kT d e^{-\frac{a z_1^2}{kT}}$$

$$I = -\frac{1}{2} kT \int_{-\infty}^{+\infty} z_1 d e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} = -\frac{1}{2} kT z_1 e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$+ \frac{1}{2} kT \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} dz_1 = 0$$

$$\overline{\alpha z_1^2} = \frac{kT}{2} \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{\omega(z)}}_{=1} e^{-\frac{\alpha z_1^2}{kT}} dz_1 = \frac{kT}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha z_1^2}{kT}} dz_1 = \frac{kT}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} kT$$

① физ. смысл абсолютной температуры системы
 абс. темп. — мера средней кинет. энергии
 частиц, составляющих систему

② внутренняя энергия идеального газа

Ср внутр. эн. — эн. движения и взаимодействия
 частиц, составляющих систему

В стат. механике внутр. эн. опред. как
 среднее значение гамильтониана системы

$$U = \bar{H} = \langle K + \Pi \rangle = \bar{K} = N \cdot \bar{\epsilon} = N \cdot s \cdot \frac{1}{2} kT =$$

$\uparrow$
 для идеального
 газа

$\uparrow$
 число
 молекул
 газа

$$= \frac{N}{N_A} \cdot s \cdot k \cdot N_A \cdot \frac{T}{2} = \gamma \cdot s \cdot R \cdot \frac{T}{2}, \quad \gamma = \frac{N}{N_A} \text{ число молей газа}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$R = k \cdot N_A \text{ универсальная газовая}$$

$$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{градус}$$

Теплоёмкость идеального газа

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

$$dQ = du + dA, \quad dA = p \cdot dV$$

$$\text{т.к. } V = \text{const} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow dA = 0 \Rightarrow dQ = du \Rightarrow$$

$$C_V = \frac{du}{dT} = \gamma \cdot R \cdot s \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{2C_V}{\gamma R}$$

$$\text{He} \rightarrow s=3$$

$$\text{N} \rightarrow s=5$$

факты, подтверждающие распределение Гиббса

① св-ва газов

$$p = nkT, \quad n = \frac{N}{V}$$

$$pV = NkT = \frac{N}{N_A} \cdot N_A kT = RT \quad \text{ур-е Менделеева-Клапейрона}$$

② распределение воздуха в атмосфере Земли

$$n(z) = C e^{-\frac{mgz}{kT}} \sim n(z) \Rightarrow n(z) = n(0) e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

$$\bar{z} = \frac{kT}{mg} \quad (\text{§ 32})$$

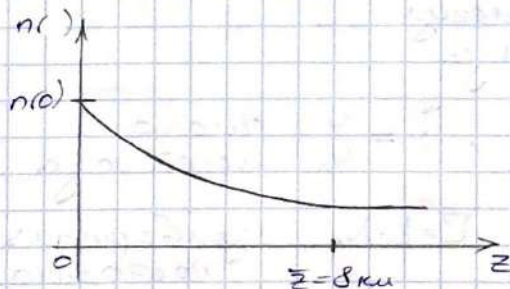
$$m = 0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

$$T = 273 \text{ К}$$

$$g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}} \quad \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$$

$$\bar{z} = 8 \text{ км}$$



§35

Диффузия и теплопроводность

Опр диффузия - проникновение одного вещества в другое
закон диффузии:

плотность потока частиц $\propto$ град их концентрации



$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$



$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \Delta t} \left[\frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right] \quad \text{плотность потока}$$

$$n = \frac{N}{V} \left[\frac{1}{\text{м}^3} \right]$$

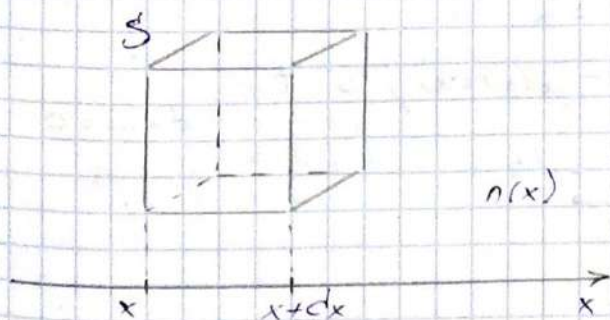
$$[D] = \frac{[j_x] \cdot [x]}{[n]} = \frac{1 \cdot \text{м} \cdot \text{м}^{-2}}{\text{м}^{-3} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

тип расширения
дифф. патка

опред. коэфф. дифф.

Опр - коэфф. пропорциональности между плотностью потока частиц и град их концентрации

выводим ур-е диффузии



$$\Delta N^{(+)} = j_x(x) \cdot S \cdot dt$$

$$\Delta N^{(-)} = j_x(x+dx) \cdot S \cdot dt$$

$$\Delta N = \Delta N^{(+)} - \Delta N^{(-)} =$$

$$= (j_x(x) - j_x(x+dx)) S \cdot dt =$$

$$= - \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \cdot S \cdot dt = dN$$

$$dn = \frac{dN}{dV} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} dt$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$$

уравнение диффузии

Опр. теплопроводность - процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле

• закон теплопроводности

плотность потока тепла $\sim$ град температуры

$$j_x = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}$$

коэфф. теплопроводности $\stackrel{\text{def}}{=} \text{коэфф. пропорц. между}$
плотностью потока тепла и град T

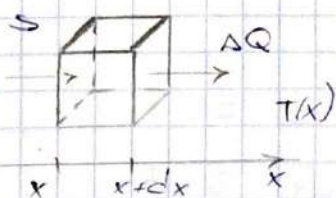
$$S \rightarrow \Delta Q_x$$

$$j_x = \frac{\Delta Q_x}{S \cdot \Delta t} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{ДТ}}{\text{м}^2} \right]$$

$\vec{x}$

$$[\alpha] = \frac{[j_x] \cdot [x]}{[T]} = \frac{\frac{\text{ДТ} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}}{\text{град}} = \frac{\text{ДТ}}{\text{м} \cdot \text{град}^2}$$

вывод уравнения теплопроводности



$$\Delta Q^{(+)} = j_x(x) S dt$$

$$\Delta Q^{(-)} = j_x(x+dx) S dt$$

$$\Delta Q = \Delta Q^{(+)} - \Delta Q^{(-)} =$$

$$= (j_x(x) - j_x(x+dx)) S dt = \quad dx \rightarrow 0$$

$$= - \frac{\partial j_x}{\partial x} \underbrace{dx S}_{dV} dt$$

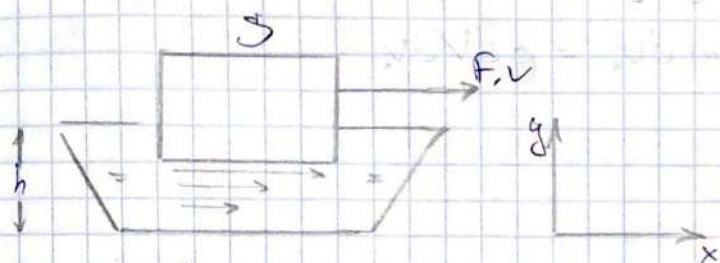
$$\Delta Q = c \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot \Delta V = - \frac{\partial j_x}{\partial x} dV dt$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c_p} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{\alpha}{c_p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{гр-е теплопроводности}$$

§ 66

Вязкость жидкостей

— св-во жидкостей препятствовать движению соприкасающихся с ней тел



• закон вязкости:

плотность потока импульса пропорциональна grad v

$$\frac{dP_x}{S \cdot dt} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Ср коэффициент вязкости — коэффициент пропорциональности между плотностью потока импульса и grad v

$$[\eta] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2} = \text{Па} \cdot \text{с}$$

Для воды $\eta \approx 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$

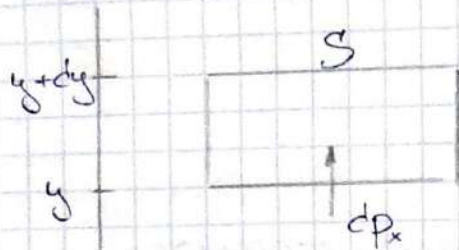
Для воздуха $\eta \approx 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$

Сила вязкого трения

$$F_x = \frac{dP_x}{dt} = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \text{const} = \frac{v}{h}$$

$$F = \eta S \frac{v}{h}$$

уравнение движения вязкой жидкости



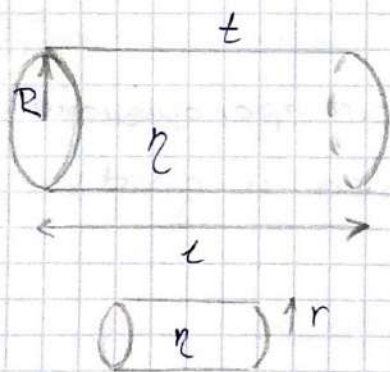
$$dp_x^{(+)} = -\eta S \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_y dt$$

$$dp_x^{(-)} = -\eta S \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y+dy} dt$$

$$\begin{aligned} dp_x &= dp_x^{(+)} - dp_x^{(-)} = +\eta S \left[\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y+dy} - \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_y \right] dt = \eta S \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy dt \\ &= \eta dV dt \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = dp_x = dm dv_x = \rho dV dv_x \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho \frac{dv_x}{dt} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

§37 Движение вязкой жидкости



$$V = ?$$

центр масс сеченного эл-та
жидкости движ-ся равномерно
 $\Rightarrow \sum \sin \alpha = 0$

$$\Delta p \cdot \pi r^2 + \eta S \frac{dv}{dr} = 0$$

$$S = 2\pi r l$$

$$\Delta p \cdot \pi r^2 + \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} = 0$$

$$dv = -\Delta p \cdot r \cdot \frac{dr}{2\eta l}$$

$$\int_{v_0}^v dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \int_0^r r dr$$

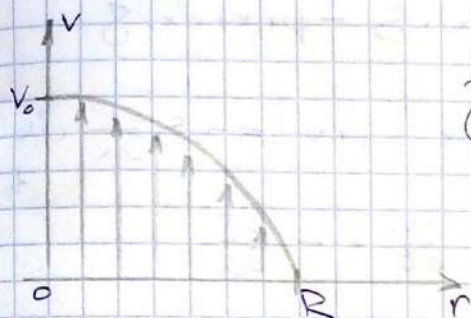
ср-е $\rightarrow$ на оси

$$\Rightarrow v - v_0 = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \cdot \frac{r^2}{2}$$

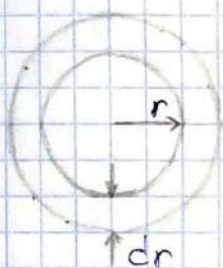
$$v = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2$$

$$v(R)=0 \Rightarrow v_0 = \frac{\Delta P}{4\eta l} R^2$$

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



закон Пуазейля



$$dV = t \cdot v(r) \cdot 2\pi r dr$$

$$V = \int dV = 2\pi t \int_0^R v(r) r dr = 2\pi t \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = \pi t v_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) d(r^2) = \pi t v_0 \left(R^2 - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{R^4}{2}\right) =$$

$$V = 2\pi t v_0 \cdot \frac{R^2}{4} = \pi t \cdot \frac{\Delta P}{4\eta l} \cdot \frac{R^2}{2}$$

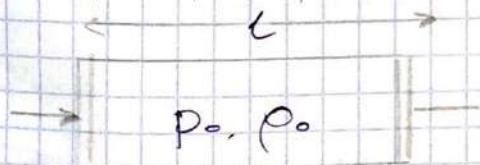
$$V = t \cdot \frac{\pi \cdot \Delta P}{8\eta l} \cdot R^4$$

формула Пуазейля

кол-во жидкости, которое вытекает за время t через поперечное сечение радиуса R

§ 38 ур-е симплекс сплошной среды

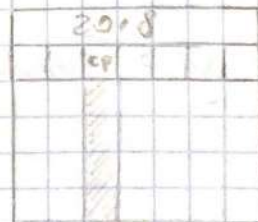
и распространение звука в сплошной среде



$t = ?$

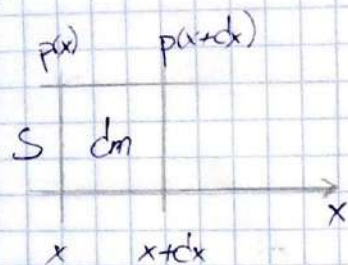
$$[x] = \text{м} \quad [t] = \text{с} \quad [p] = \text{Па}$$

$$[p] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \quad [v_x] = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$



↑ сплошная среда

- ур-е движения элемента сплошной среды



$$dm = \rho dV, \quad dV = S dx$$

$$dm \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} = p(x) \cdot S - p(x+dx) \cdot S =$$

$$= -S(p(x+dx) - p(x)) = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad dx \rightarrow 0$$

$$\rho S dx \frac{\partial v_x}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx \Rightarrow \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0} \quad (1)$$

- ур-е непрерывности

$$dm^{(+)} = v_x(x) dt \cdot S \rho(x)$$

$$dm^{(-)} = v_x(x+dx) \rho(x+dx) \cdot dt \cdot S$$

$$dm = dm^{(+)} - dm^{(-)} = S dt (v_x(x) \rho(x) - v_x(x+dx) \rho(x+dx)) \Rightarrow$$

$$dm = -S dt \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx \quad S dx = dV, \quad dm = \rho dV$$

$$\rho dV = -dV dt \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x)$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = 0} \quad (2)$$

(1), (2) - ур-я динамики

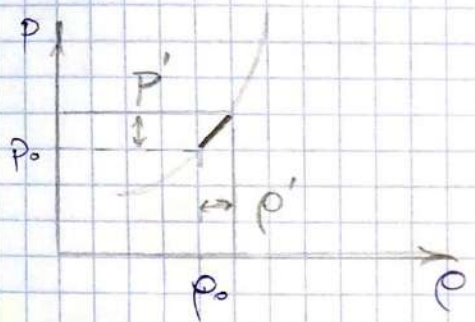
§39 звуковая волна

достаточно слабый звук: $p = p_0 + p'$, $|p'| \ll p_0$
 $\rho = \rho_0 + \rho'$, $|\rho'| \ll \rho_0$

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 & \text{у-е движения элемента сплошной среды} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 & \text{у-е непрерывности} \end{cases}$$

у-е состояния среды

Опр - зависимость давления среды от плотности $p = p(\rho)$



$$\frac{p'}{\rho'} = \cos \omega t \equiv C_0^2 \quad [C_0] = \left[\frac{m}{c} \right]$$

$$p' = C_0^2 \rho'$$

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + C_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 & \left| \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + C_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + C_0^2 \rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = -C_0^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}$$

$$v_x(x, t) = A_1(x - C_0 t) + A_2(x + C_0 t)$$

$$C_0^2 = \frac{p'}{\rho'} = \frac{dp}{d\rho}$$

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$C_p = C_v + R$$

$$\gamma = 1 + \frac{R}{C_v} = 1 + \frac{1}{5/2} = \frac{7}{5} \quad \text{для воздуха}$$

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad m = \text{const}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$p = \text{const} \cdot \rho^{\gamma}$$

$$dp = \text{const} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho = \gamma \cdot \frac{p}{\rho} d\rho$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} \approx \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = C_0^2 \Rightarrow C_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

$$p_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho_0 = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \gamma = 1,4 \Rightarrow C_0 \approx 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Задачи

- ② Найти среднюю высоту, на которую поднимается частица массы m в однородном поле тяжести при температуре T

$$\bar{z} = \int_0^{+\infty} z \cdot \omega(z) dz = C \int_0^{+\infty} z \cdot \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz$$

$$\omega(z) = C \cdot e^{-\frac{H(z)}{kT}} \quad \text{по 4-й Гиббса, } H(z) = K + P = mgz$$

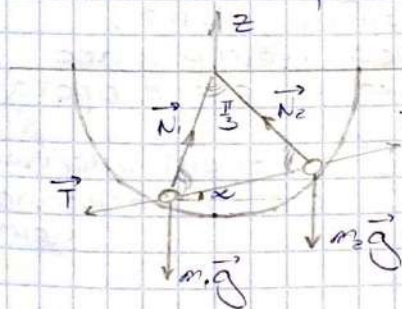
$$d\omega = C e^{-\frac{mgz}{kT}} \cdot \left(-\frac{mg}{kT}\right) dz = -\frac{mg}{kT} \omega dz$$

$$z d\omega = -\frac{mg}{kT} \omega z dz$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{+\infty} z d\omega &= -\frac{mg}{kT} \int_0^{+\infty} z \omega(z) dz \\ \underbrace{z \cdot \omega(z) \Big|_0^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \omega(z) dz}_{=1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{mg}{kT} \int_0^{+\infty} z \omega(z) dz$$

$$\bar{z} = \frac{kT}{mg}$$

- ⑨ Гантелька представляет собой два шарика массами m_1 и m_2 , соединённые невесомым стержнем длины l . Гантельку кладут в гладкую сферическую чашу радиуса $R = l$. Найти угол α между гантелью и горизонтом в положении равновесия



$$s = 1 \quad \varphi = \alpha$$

$$P = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

$$z_1 = -R \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \quad z_2 = -R \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$P = -m_1 g R \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - m_2 g R \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = P(\alpha)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = -m_1 g R \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + m_2 g R \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{в состоянии} \\ \text{равновесия } P \\ \text{имеет экстр по всем} \\ \text{обобщённым координатам} \end{array}$$

$$-m_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + m_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0$$

$$-m_1 (\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha) + m_2 (\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha) = 0$$

$$-m_1 (1 - \sqrt{3} \tan \alpha) + m_2 (1 + \sqrt{3} \tan \alpha) = 0$$

$$\sqrt{3} \tan \alpha (m_1 + m_2) = m_1 - m_2$$

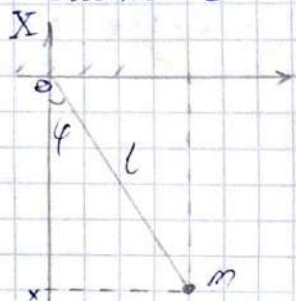
$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3} (m_1 + m_2)} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

13) $z = z(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

$$\begin{cases} x = z \cos \varphi \\ y = z \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{z} \cos \varphi - z \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{z} \sin \varphi + z \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{z}^2 + (z\dot{\varphi})^2 = v^2 \quad \vec{v} = \vec{e}_z \cdot \dot{z} + \vec{e}_\varphi \cdot z\dot{\varphi}$$

14) найти период колебаний математического маятника, длины l



$s = l \quad \text{так } \varphi = \varphi$

$$P = -mgx = -mgl \cos \varphi$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2} = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

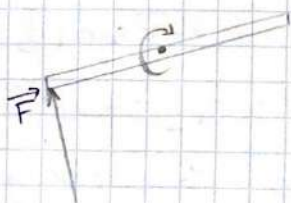
$$L = K - P = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad \text{при } \sin \varphi \approx \varphi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$$

21) Стержень длины l лежит на гладкой поверхности, в один из его концов бьет с силой F перпендикулярно. Найти расстояние, на которое сместится центр масс стержня за время, равное совершению одного оборота



$$I\dot{\omega} = F \frac{l}{2}, \quad I = \frac{ml^2}{12} \quad \text{момент инерции стержня относительно центра}$$

$$F = \dot{p} = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = F dt$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}$$

$$F = \frac{2}{l} I \dot{\omega} = \frac{2}{l} \cdot \frac{ml^2}{12} \cdot \dot{\omega} = \frac{ml}{6} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow$$

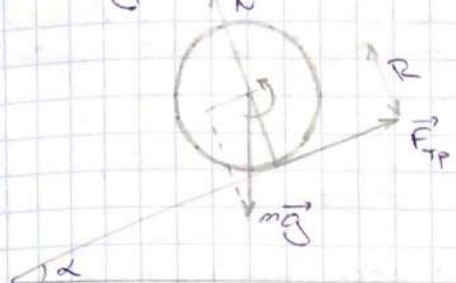
$$dp = \frac{ml}{6} d\omega$$

$$mv = p = \frac{ml}{6} \omega \Rightarrow v = \frac{l\omega}{6}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$S = v \cdot t = v \cdot T = \frac{l\omega}{6} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi l}{3}$$

центр масс
сместится равномерно

- 13) Цилиндр скатывается по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α . Существует проскальзывание. Найдите ускорение центра цилиндра



$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \\ I\ddot{\varphi} = F_{\text{тр}} \cdot R \\ x = R\varphi \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\varphi} \end{cases}$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{I\ddot{\varphi}}{R} = \frac{I}{R} \cdot \frac{\ddot{x}}{R} = \frac{I\ddot{x}}{R^2}$$

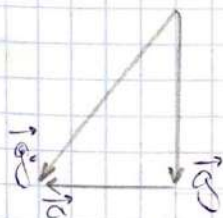
$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \frac{I\ddot{x}}{R^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

$$I = \frac{mR^2}{2} \quad \text{для цилиндра относительно оси, проходящей через центр}$$

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + 1/2} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

- 12) Поезд движется с постоянным ускорением a на прямолинейном горизонтальном участке пути. В окне из вагонов к потолку подвешен на нити длиной l маленький шарик. Шарик отклоняют от положения равновесия и отпускают. Найдите период колебаний шарика T



$$g_0 = \sqrt{a^2 + g^2} \quad I'' + mg_0 \sin \alpha = 0 \quad I = ml^2$$

$$-mg_0 \sin \alpha = m\ddot{\alpha} l \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g_0}{l} \alpha = 0 \quad \text{для стержня}$$

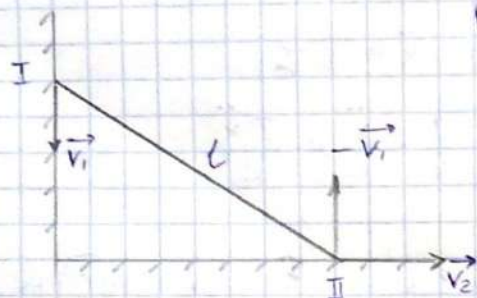
$$\omega^2 = \frac{g_0}{l} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$

- 14) Даны две материальные т. с. массой m_1 и m_2 , расстояние между ними z . Найти потенциальную энергию системы

$$\Pi = \int d\Pi = \int \vec{F} d\vec{z} = \int \frac{Gm_1 m_2}{z^2} dz = Gm_1 m_2 \int d(-\frac{1}{z}) = -G \frac{m_1 m_2}{z}$$

$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{z} = F dz$$

- 11) Стержень длины l скользит в вертикальной плоскости, опираясь одним концом на вертикальную, а другим на горизонтальную плоскости. В некоторый момент времени скорости концов составляют v_1 и v_2 . Какова угловая скорость вращения стержня ω в этот момент времени?



Перейдем в систему координат, связанную с I точкой

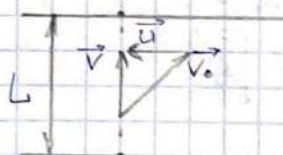
В новой системе координат (.) II вращается вокруг (.) I со скоростью $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \equiv \vec{v}$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \quad |\vec{v}| = \omega l$$

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

- 12) Ловец переплывает реку шириной L по прямой, перпендикулярной берегу и возвращается обратно, затратив на весь путь время $t_1 = 4$ мин. Проплывал такое же расстояние L вдоль берега реки и возвращаясь обратно, ловец затрачивает время $t_2 = 5$ мин. Найти, во сколько раз α скорость ловца относительно воды превышает скорость течения реки, считая ее по всей ширине реки постоянной?

V_0 - скорость ловца относительно воды
 u - скорость течения реки



$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{u} \quad V = \sqrt{V_0^2 - u^2}$$

$$t_1 = \frac{2L}{V}$$

$$t_2 = \frac{L}{V_0 + u} + \frac{L}{V_0 - u}$$

$$\alpha = \frac{V_0}{u}$$

$$t_2 = \frac{L(V_0 - u) + L(V_0 + u)}{V_0^2 - u^2} = \frac{2LV_0}{V_0^2 - u^2} = \frac{V_0}{2L} t_1^2 \Rightarrow V_0 = 2L \frac{t_2}{t_1^2}$$

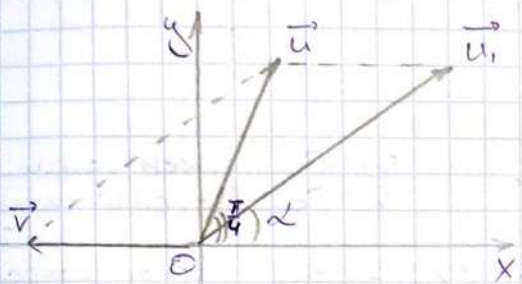
$$u = \sqrt{V_0^2 - V^2} = \sqrt{\left(2L \frac{t_2}{t_1^2}\right)^2 - \left(\frac{2L}{t_1}\right)^2} = \frac{2L}{t_1} \sqrt{\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 - 1}$$

$$\alpha = \frac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \frac{5}{3}$$

- 16) Корабль плывёт на запад со скоростью V . Известно, что ветер дует с юго-запада. Скорость ветра, измеренная относительно палубы корабля, равна U_0 . Найдите скорость ветра U относительно земли.

Движущаяся с/о — с/о, связанная с кораблём
неподвижная с/о — с/о, связанная с землёй
 V — переносная скорость
 U — скорость ветра в неподвижной с/о
 U_0 — относительная скорость ветра

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{V}$$



$$\begin{cases} U_x = U_{0x} + V_x \\ U_y = U_{0y} + V_y \end{cases}$$

$$U_x = U \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} U$$

$$U_{0x} = U_0 \cos \alpha$$

$$V_x = -V$$

$$U_y = U \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} U$$

$$U_{0y} = U_0 \sin \alpha$$

$$V_y = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} U = U_0 \cos \alpha - V \\ \frac{\sqrt{2}}{2} U = U_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_0 \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} U + V \\ U_0 \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} U \end{cases}$$

$$(U_0 \cos \alpha)^2 + (U_0 \sin \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} U + V\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} U\right)^2$$

$$U_0^2 = U^2 + \sqrt{2} UV + V^2$$

$$U^2 + \sqrt{2} UV + (V^2 - U_0^2) = 0$$

$$U = -\frac{V}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{U_0^2 - \frac{V^2}{2}}$$

- 24) Бильярдному шару ударом сообщили поступательное движение со скоростью V_0 . Через какое время t движение шара перейдёт в качение без проскальзывания? Коэффициент трения шара о поверхность стола μ .

$$\vec{m}\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}}$$

$$I\epsilon_2 = M = F_{\text{тр}} R$$

$$ma = -\mu mg$$

$$\epsilon_2 = \frac{mg \cdot R}{\frac{2}{5} m R^2} = \frac{5}{2} \mu g \frac{1}{R}$$

$$\frac{V - V_0}{t} = -\mu g$$

$$\omega = \frac{5}{2} \mu g \frac{1}{R} \cdot t$$

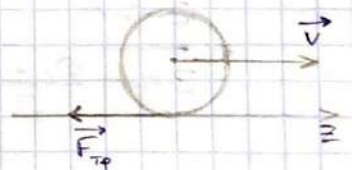
$$\epsilon_2 = \omega$$

$$V - V_0 = -\mu g t$$

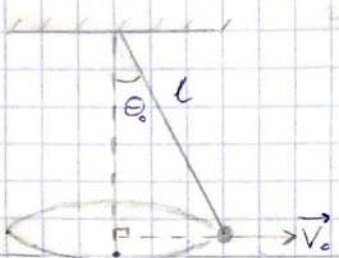
$$V = \omega R = \frac{5}{2} \mu g t$$

$$V_0 = V + \mu g t = \frac{7}{2} \mu g t$$

$$t = \frac{2}{7} \cdot \frac{V_0}{\mu g}$$



- 6) Маленький шарик подвешен на нити длиной l . В начальный момент нить составляет с вертикалью угол θ_0 , а шарик имеет скорость V_0 , направленную горизонтально. Найти величину V_0 , если известно, что при дальнейшем движении угол отклонения нити от вертикали возрастает до величины θ_1 , а затем начинает уменьшаться. Сопротивлением воздуха пренебречь.



нулевой уровень

$$\begin{cases} mV_0 \sin \theta_0 = mV \sin \theta & \Rightarrow V_0 = V \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \quad \text{закон сохран.} \\ \frac{mV_0^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{mV^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta) & \text{момента импульса} \\ \frac{V^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} - 1 \right) = gl(\cos \theta_0 - \cos \theta) & \text{закон сохран.} \\ & \text{полной механической} \\ & \text{энергии} \end{cases}$$

$$\frac{V^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} - 1 \right) = gl(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$V^2 = \frac{2gl(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} - 1}$$

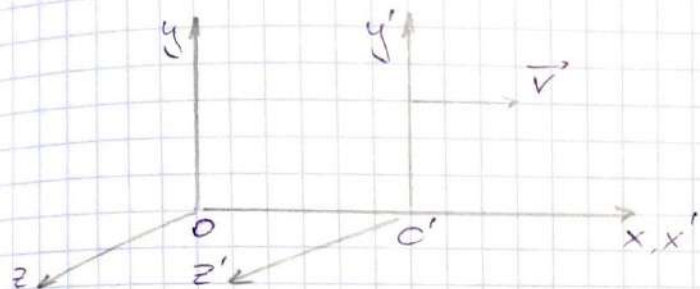
$$V_0 = \sin \theta \sqrt{\frac{2gl(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0}} = \sin \theta \sqrt{\frac{2gl}{\cos \theta + \cos \theta_0}}$$

$$\begin{aligned} 4 \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0} &= \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{(\sin \theta - \sin \theta_0)(\sin \theta + \sin \theta_0)} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\theta_0 + \theta}{2} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2}}{2 \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \cos \frac{\theta + \theta_0}{2} \cdot 2 \sin \frac{\theta + \theta_0}{2} \cos \frac{\theta - \theta_0}{2}} = \\ &= \frac{1}{2 \cos \frac{\theta + \theta_0}{2} \cos \frac{\theta - \theta_0}{2}} = \frac{1}{\cos \theta + \cos \theta_0} \end{aligned}$$

3)

$$V = t \cdot \frac{\pi \Delta P \cdot R^4}{8 \eta l} \quad \varphi - \text{табл. Пуазейля}$$

- 4) Поставленная система отсчёта S' движется со скоростью $V = 0,8c$ относительно неподвижной системы S так, что направление осей x' и x совпадают. Частица движется в направлении оси x' со скоростью $V' = 0,8c$ относительно подвижной системы. Какова скорость этой частицы V_x относительно неподвижной системы отсчёта



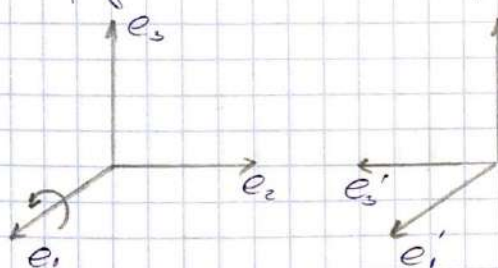
преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad y = y' \quad z = z'$$

$$t = \frac{t' + x' \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{V_x' + V}{1 + V_x' \cdot \frac{V}{c^2}} \Rightarrow V_x \approx 0,976c$$

- 5) Найти матрицу, осуществляющую поворот на 90° вокруг оси Ox декартовой системы координат



$$S_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j') = |\vec{e}_i| |\vec{e}_j'| \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{e}_i, \vec{e}_j')$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 25) Идеальный газ находится в сосуде объёмом V при температуре T . Используя закон Ньютона и распределение Максвелла, найти давление газа P , если число молекул равно N

$$\vec{F} = \vec{p} \quad F_x = \dot{p}_x \quad \Delta p_x = 2mV_x$$

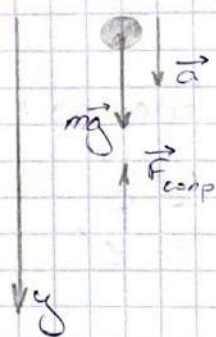
$$dN(V_x) = dn(V_x) \cdot S \cdot V_x \cdot dt, \quad dn(V_x) = n \cdot \omega(V_x) dV_x$$

$$dp_x(V_x) = \Delta p_x \cdot dN(V_x) = 2mnS dt V_x^2 \omega(V_x) dV_x$$

$$dp_x = 2mnS dt \int_0^\infty V_x^2 \omega(V_x) dV_x \Rightarrow p = 2mn \int_0^\infty V_x^2 \omega(V_x) dV_x$$

$$p = mn \int_{-\infty}^\infty V_x^2 \omega(V_x) dV_x = mn \cdot \overline{V_x^2} = mn \cdot \frac{kT}{m} = nkT$$

- (8) Тело свободно падает под действием силы тяжести без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости. Как меняется скорость тела от времени?



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}} \quad \text{II закон Ньютона}$$

$$\vec{a} = \vec{g} + k\vec{v}$$

$$k = \frac{\alpha}{m}$$

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = \alpha \vec{v}$$

коэф. пропорц.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = g - k\dot{y} \end{cases}$$

$$\dot{v}_y = g - kv_y \Leftrightarrow \dot{v}_y + kv_y = g$$

$$1) \dot{v}_y - kv_y = 0$$

$$\frac{dv_y}{v_y} = -k dt$$

$$v_y = C e^{-kt}$$

$$2) v_y = A : k \cdot A = g \Rightarrow A = \frac{g}{k}$$

$$v_y = \left(v_{y0} - \frac{g}{k}\right) e^{-kt} + \frac{g}{k} \Rightarrow v = -\frac{g}{k} e^{-kt} + \frac{g}{k} = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

- (15) К струне массой m , длиной l , приложим силу T . С какой частотой будет колебаться струна?

При возбуждении нормальных волн струны устанавливаются стоячие волны, при этом на концах струны всегда имеем узел смещения

$$y(x, t) = X(x) \Theta(t) = C \sin kx \sin \omega t$$

$$y(0, t) = y(l, t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow \sin kl = 0$$

$$k_n = \frac{\pi n}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow \omega_n = v \cdot k_n = v \left(\frac{\pi n}{l} \right) = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{Tl}{m}}$$

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{T}{ml}}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{ml}}$$